Xioli VILLALOBOS GARCÍA

GEOMETRÍA

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LAS ECUACIONES DE LA RECTA POR ESTUDIANTES DE 4 º DE ESO

TFM 2017

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Resolución de problemas de las ecuaciones de la recta por estudiantes de 4º de ESO

Xioli Villalobos García

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

Parte I:

1. Las ecuaciones de la recta en el currículo vigente 11
1.1. Contenidos en Educación Primaria 11
1.2. Contenidos en ESO 12
1.3. Contenidos en Bachillerato 16
1.4. Síntesis de la evolución de los contenidos 18
2. Criterios de evaluación de las ecuaciones de la recta en el currículo vigente 21
2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria 21
2.2. Criterios de evaluación en ESO 22
2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato 27
3. Estándares de aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el currículo vigente 29
3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria 29
3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en ESO 30
3.3. Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato 36
4. Ejercicios, problemas y cuestiones sobre las ecuaciones de la recta en los libros de texto y su relación con las funciones en el currículo vigente 39
4.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de ESO 39
4.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de ESO 42
4.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de ESO 45
4.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachillerato 48
4.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de Bachillerato 54
5. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo 59
5.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto 59
5.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo 60

Parte II:

6. Ecuaciones de la recta en el libro de texto de referencia 67
6.1. Objetos matemáticos involucrados 67
6.2. Análisis global de la unidad didáctica 72
7. Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica 81
7.1. Dificultades 81
7.2. Errores y su posible origen 81
8. El proceso de estudio 83
8.1. Distribución del tiempo de la clase 83

8.2. Actividades adicionales planificadas 85
8.3. La tarea: actividad autónoma del alumno prevista 86
9. Experimentación 89
9.1. Muestra y diseño de la experimentación 89
9.2. El cuestionario 89
9.3. Cuestiones y comportamientos esperados 91
9.4. Resultados 93
9.5. Discusión de los resultados 101
Anexos 109
I. Unidad didáctica del libro de texto 111
II. Presentación PowerPoint Ecuaciones de la Recta 133
III. Applets GeoGebra 137

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar aspectos previos y posteriores a la práctica docente de los contenidos relacionados con las ecuaciones de la recta con alumnos de 4º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y en los libros de texto en el Tercer Ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre las ecuaciones de la recta, que se ha puesto en marcha en un aula de 4º de ESO en el marco del Prácticum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas.

Parte I

Las ecuaciones de la recta en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de las ecuaciones de la recta en el currículo y en los libros de texto en el Tercer Ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis de divide en cinco capítulos. En el primer, segundo y tercer capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del currículo vigente que hacen referencia a las ecuaciones de la recta en cada uno de los grados. En el cuarto se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 4º de ESO, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el quinto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1

Las ecuaciones de la recta en el currículo vigente

En este capítulo se analizan los contenidos básicos que hacen referencia a las ecuaciones de la recta en nuestro sistema educativo. El estudio comprende el Tercer Ciclo de Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y el Bachillerato.

Para ello se toman como referencia los currículos básicos establecidos en los Reales Decretos 126/2014 y 1105/2014 para la Educación Primaria y para la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, respectivamente. Adicionalmente, se establecen los siguientes descriptores:

- Proporcionalidad numérica.
- Expresiones algebraicas.
- Representación en el plano.
- Análisis de funciones, que incluye el análisis, interpretación de gráficas y el modelado de situaciones cotidianas o reales.
- Uso de tecnología.

A través de estos descriptores se identificará cuándo aparecen los conceptos relacionados con las ecuaciones de la recta, cómo se transforman, evolucionan y se relacionan.

El contenido de la ecuación de la recta oficialmente se introduce en el currículo en 2º de ESO. En cursos anteriores se van impartiendo contenidos periféricos, tales como proporcionalidad, lenguaje algebraico o sistema de coordenadas cartesiano, que son imprescindibles para comprender y adquirir los conocimientos nuevos.

1.1. Contenidos en Educación Primaria

En la Tabla 1 se indican los contenidos mínimos establecidos en el currículo vigente para el Tercer Ciclo de Educación Primaria.

Aunque el objeto de este trabajo fin de máster es el análisis de los contenidos relacionados con las ecuaciones de la recta en 4º de ESO, se inicia el análisis con los contenidos del currículo en el Tercer Ciclo de Educación Primaria, para conocer que conocimientos relacionados con el tema tienen los alumnos al empezar la ESO.

Contenidos Tercer Ciclo Primaria

Descriptor	5º	6º
Proporcionalidad numérica	Bloque Números y Álgebra Aumentos y disminuciones porcentuales.	Bloque Números y Álgebra Porcentajes y proporcionalidad: Aumentos y disminuciones porcentuales. Proporcionalidad directa.
Expresiones algebraicas	-	-

Contenidos Tercer Ciclo Primaria (Continuación)

Descriptor	**5º**	**6º**
Representación en el plano	Bloque Números y Álgebra Números enteros, decimales y fracciones. Bloque Geometría La situación en el plano y en el espacio. Posiciones relativas de rectas y circunferencias. Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos. La representación elemental del espacio, escalas y graficas sencillas.	Bloque Geometría Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos. La representación elemental del espacio, escalas y graficas sencillas.
Análisis de funciones	-	-
Uso de tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje.	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje.

Tabla 1. Contenidos mínimos establecidos en el currículo para el Tercer Ciclo de Educación Primaria.

1.2. Contenidos en ESO

A continuación, se presentan los contenidos del currículo relacionados con las ecuaciones de la recta para la ESO. En todo el ciclo de la ESO, el Bloque de Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas es común y se debe trabajar con todos los contenidos. En nuestro caso esos contenidos, están relacionados con el descriptor *Uso de tecnologías* y son:

Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:

a. La elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.
b. Facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos del tipo numérico, algebraico o estadístico.
c. El diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.

A efectos de que las tablas no estén recargadas de información se indicará únicamente el nombre del bloque.

En las Tablas 2-6, se presentan los contenidos relacionados con las ecuaciones de la recta para los diferentes cursos de este ciclo. La ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), establece una nueva configuración del currículo en ESO. Divide la ESO en dos ciclos, el primero abarca los tres primeros cursos y el segundo solo incluye el cuarto curso. Matemáticas es una asignatura troncal hasta 2º de ESO. A partir del 3º de ESO, el estudiante tiene la opción de cursar Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas o Aplicadas. Aunque los contenidos en 3º de ESO de una opción u otra presentan diferencias en el currículo, los contenidos relacionados con las ecuaciones de la recta son comunes por lo que se presentan conjuntamente.

Contenidos en el Currículo Primer Ciclo de ESO

Descriptor	1º de ESO
Proporcionalidad numérica	Bloque Números y Álgebra Proporcionalidad directa y porcentajes: cálculo en casos sencillos.
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra Iniciación al lenguaje algebraico.
Representación en el plano	Bloque Geometría Elementos básicos de la geometría en el plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad.
Análisis de funciones	Bloque Números y Álgebra Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representan situaciones reales al algebraico y viceversa. Bloque Funciones Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados. El concepto de función: variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula).
Uso de las tecnologías	Bloque Números y Álgebra Elaboración y utilización de estrategias para el cálculo mental, para el cálculo aproximado y para el cálculo con calculadora u otros medios tecnológicos Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 2. Contenidos mínimos establecidos en currículo para 1º de ESO.

Contenidos en el Currículo Primer Ciclo de ESO

Descriptor	2º de ESO
Proporcionalidad numérica	Bloque Números y Álgebra Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora). Aumentos y disminuciones porcentuales. Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad. El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Contenidos en el Currículo Primer Ciclo de ESO (continuación)

Descriptor	*2º de ESO*
Representación en el plano	-
Análisis de funciones	Bloque Funciones Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.
Uso de las tecnologías	Bloque Funciones Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de graficas. Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 3. Contenidos mínimos establecidos en currículo para 2º de ESO.

Contenidos en el Currículo Primer Ciclo de ESO

Descriptor	**3º de ESO, Enseñanzas Aplicadas y Académicas**
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra Expresión usando lenguaje algebraico. Resolución de problemas mediante ecuaciones, sistemas y otros métodos personales. Expresiones de la ecuación de la recta.
Representación en el plano	Bloque Geometría Geometría del plano. Lugar geométrico.
Análisis de funciones	Bloque Funciones Análisis y descripción cualitativa de graficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Expresiones de la ecuación de la recta.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 4. Contenidos mínimos establecidos en currículo para 3º de ESO. Enseñanzas Aplicadas y Académicas

Contenidos en el Currículo Segundo Ciclo de ESO

Descriptor	4º de ESO Enseñanzas Académicas
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Bloque Geometría Iniciación a la geometría analítica en el plano: coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta.
Representación en el plano	Bloque Geometría Paralelismo, perpendicularidad.
Análisis de funciones	Bloque Funciones Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.
Uso de las tecnologías	Bloque Geometría Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la compresión de conceptos y propiedades geométricas. Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 5. Contenidos mínimos en 4º de ESO Enseñanzas Académicas.

Contenidos en el Currículo Segundo Ciclo de ESO

Descriptor	4º de ESO Enseñanzas Aplicadas
Proporcionalidad numérica	Bloque Números y Álgebra Proporcionalidad directa e inversa. Aplicación a la resolución de problemas de la vida cotidiana. Los porcentajes en la economía.
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra Resolución de ecuaciones y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolución de problemas cotidianos mediante ecuaciones y sistemas.
Representación en el plano	-
Análisis de funciones	Bloque Funciones Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 6. Contenidos mínimos en 4º de ESO Enseñanzas Aplicadas.

1.3. Contenidos en Bachillerato

El Bachillerato se oferta en tres modalidades: Ciencias, Humanidades y Ciencias Sociales y Artes. La asignatura de Matemáticas se imparte en la modalidad de Ciencias y en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales (sólo en el itinerario de Ciencias Sociales). En las Tablas 7-9 se indican los contenidos relacionados con las ecuaciones de la recta para los cursos de este ciclo. No se incluyen el curso de 2º de Bachiller Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, ya que no presenta contenidos relacionados con las ecuaciones de la recta.

Como el bloque de Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas es común y se debe trabajar con todos los contenidos de la asignatura. A los efectos de constitución de las tablas y para que éstas no contengan demasiada información se colocara el título del bloque refiriéndonos a los contenidos relacionados con el descriptor *Uso de tecnologías.* Esos contenidos son:

Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:

a. La elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.
b. Facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos del tipo numérico, algebraico o estadístico.
c. El diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.

Contenidos en Bachillerato

Descriptor	1º de Bachillerato Modalidad de Ciencias
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra Planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante ecuaciones e inecuaciones. Interpretación gráfica. Método de Gauss para la resolución e interpretación de sistemas de ecuaciones lineales. Bloque Geometría Vectores libres en el plano. Operaciones geométricas. Producto escalar. Módulo de un vector. Angulo de dos vectores. Bases ortogonales y ortonormales. Geometría plana. Ecuaciones de la recta. Resolución de problemas. Lugares geométricos del plano.
Representación en el plano	Bloque Geometría Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.
Análisis de funciones	Bloque Análisis Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Recta tangente y normal.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 7. Contenidos mínimos en 1º de Bachillerato Modalidad de Ciencias.

Contenidos en Bachillerato

Descriptor	1º de Bachillerato Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra Ecuaciones lineales Sistemas de ecuaciones de primer y segundo grado con 2 incógnitas. Aplicaciones. Interpretación gráfica. Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas
Representación en el plano	
Análisis de funciones	Bloque Análisis Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. Recta tangente a una función en un punto.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 8. Contenidos mínimos en 1º de Bachillerato Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales.

Contenidos en Bachillerato

Descriptor	2º de Bachillerato – Modalidad Ciencias
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico. Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.
Representación en el plano	Bloque Geometría Posiciones relativas (incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos).
Análisis de funciones	Bloque Análisis Función derivada.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 9. Contenidos mínimos en 2º de Bachillerato Modalidad de Ciencias.

Como se observa en las tablas en este ciclo, se han incluido en el análisis los contenidos relacionados con la interpretación grafica de la derivada, ya que se trata de una recta tangencial a un punto.

1.4. Síntesis de la evolución de los contenidos

El estudio del currículo vigente muestra que los contenidos relacionados con las ecuaciones de la recta van evolucionando y se van estudiando desde varios puntos de vista a medida que se avanza en los cursos y ciclos del sistema educativo. En la Tabla 10 se puede apreciar la evolución de los contenidos.

Por ejemplo, analizando el descriptor de expresiones algebraicas se observa cómo se va construyendo el conocimiento. En 1º de ESO se introduce el lenguaje algebraico y en 2º de ESO se trabaja la jerarquía de operaciones, se introducen las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones. En 3º de ESO se trabaja la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones y, en 4º de ESO se introducen los vectores y se trabaja con las distintas ecuaciones de la recta. Finalmente, en Bachillerato se profundiza en el estudio de vectores y ecuaciones de la recta, tanto en el plano como en el espacio, y se aborda las posiciones relativas de rectas entre sí y de rectas y planos.

Otra perspectiva se puede observar al analizar el descriptor de la proporcionalidad, se observa como en Educación Primaria, se empieza con aumento y disminuciones de cantidades, posteriormente ya en ESO se introducen los porcentajes y se trabaja la proporcionalidad directa. La proporcionalidad es el puente entre el descriptor de Proporcionalidad Numérica y Funciones. En 2º de ESO se trabaja con la proporcionalidad directa en forma de función lineal y posteriormente se generaliza a la función afín, ambas con representación gráfica una recta.

Si observamos la evolución desde el punto de vista del descriptor de la representación en el plano, empezaríamos en la Educación Primaria con la representación de números y cantidades en la recta, se introducirse el plano cartesiano, la representación de un punto en éste, posteriormente puntos proporcionales. En la ESO se introducen conceptos de paralelismo, perpendicularidad, se trabajan entonces posiciones relativas de la recta. De nuevo los contenidos que se están trabajando desde un punto de vista gráfico, se enlazan nuevamente con el álgebra y las funciones.

La evolución de contenidos continúa de modo que en Bachillerato se inicia el estudio en tres dimensiones. Allí se introducen las ecuaciones del plano y se estudian las relaciones entre planos y rectas.

Descriptores	*Primaria*	*Primer Ciclo - ESO*			*Segundo Ciclo-ESO*	*Bachillerato*	
	Primaria	**1º de ESO**	**2º de ESO**	**3º de ESO Académicas/Aplicadas**	**4º de ESO Académica**	**I Ciencias**	**II Ciencias**
Proporcionalidad numérica	Inicio de Proporcionalidad	Proporcionalidad directa	Proporcionalidad. Constante de proporcionalidad	-	-	-	-
Expresiones algebraicas	-	Iniciación en el lenguaje algebraico	Lenguaje algebraico generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	Resolución ecuaciones y sistemas de ecuaciones Expresiones de la ecuación de la recta.	Geometría en el plano: vectores. Ecuaciones de la recta.	Operaciones con vectores. Ecuación de la recta.	Vectores en el espacio. Ecuaciones de la recta y el plano. Posiciones relativas
Representación en el plano	Iniciación sistema de coordenadas Representación coordenada cartesiana Nociones de paralelismo y perpendicularidad	Elementos básicos en el plano. Paralelismo y perpendicularidad	-	Geometría en el plano	Paralelismo y perpendicularidad	Posiciones relativas	Posiciones relativas (Incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos)
Análisis de funciones	-	Concepto función: Variable dependiente e independiente	Funciones lineales. Cálculo pendiente. Representación a partir de la ecuación Obtención ***ecuación*** a partir de la pendiente	-	-	Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada. Recta tangente y normal.	Función derivada.
Uso de las tecnologías	Uso de calculadora	Uso de calculadora y otros medios tecnológicos	Utilización calculadoras y programas para construir e identificar graficas	-	Aplicaciones informáticas de geometría dinámica	-	-

Tabla 10. Evolución de contenidos mínimos de ecuaciones de la recta en Primaria, ESO y Bachillerato

Capítulo 2

Criterios de evaluación de las ecuaciones de la recta en el currículo vigente

En este capítulo se analizan los criterios de evaluación establecidos por el currículo vigente. Se sigue la metodología establecida en el capítulo anterior utilizando los mismos descriptores y analizando los mismos cursos.

2.1. Criterios de evaluación en Educación Primaria

En las tablas siguientes se indican los criterios de evaluación para cada curso del Tercer Ciclo de la Educación Primaria.

Tercer Ciclo Educación Primaria

Descriptor	**5 º**
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	-
Representación en el plano	Bloque Números y Álgebra 1. Leer, escribir y ordenar, utilizando razonamientos apropiados, distintos tipos de números (naturales, enteros, fracciones y decimales hasta las décimas). Bloque Geometría 1. Utilizar las nociones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, simetría, geometría, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. 5. Interpretar representaciones espaciales realizas a partir de sistemas de referencia y de objetos o situaciones familiares.
Análisis de funciones	-
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas 12. Utilizar los medios tecnológicos de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando analizando y seleccionando información relevante en internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos.

Tabla 11. Criterios de Evaluación. 5 º Primaria.

Tercer Ciclo Educación Primaria

Descriptor	**6 º**
Proporcionalidad numérica	Bloque Números y Álgebra 7. Iniciarse en el uso de los porcentajes y la proporcionalidad directa para interpretar e intercambiar información y resolver problemas en contextos de la vida cotidiana.
Expresiones algebraicas	-
Representación en el plano	Bloque Geometría 1. Reconocer los ejes de coordenadas en el plano. Representar pares ordenados en un sistema cartesiano.
Análisis de funciones	Bloque Números y Álgebra 7. Iniciarse en el uso de los porcentajes y la proporcionalidad directa para interpretar e intercambiar información y resolver problemas en contextos de la vida cotidiana.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas 12. Utilizar los medios tecnológicos de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando analizando y seleccionando información relevante en internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos.

Tabla 12. Criterios de Evaluación. 6 º Primaria.

2.2. Criterios de evaluación en ESO

Como el bloque de Métodos y Actitudes en Matemáticas es común a todos los cursos y se debe trabajar con todos los contenidos, el criterio abajo indicado, aunque se tiene en cuenta no se incluye en las tablas siguientes, en ellas se colocará el título del bloque. En nuestro caso, el criterio está relacionado con el descriptor *Uso de tecnologías* y es:

11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

Primer Ciclo de ESO

Descriptor	1 º de ESO
Proporcionalidad numérica	Bloque Números y Álgebra 4. Analizar procesos numéricos cambiantes. Identificando patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra 3. Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones o estrategias de cálculo mental.
Representación en el plano	Bloque Geometría 1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características para clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto, y abordad problemas de la vida cotidiana.
Análisis de funciones	Bloque Números y Álgebra 4. Analizar procesos numéricos cambiantes. Identificando patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas. Bloque Funciones 1. Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 13. Criterios de evaluación 1 º ESO.

Primer Ciclo de ESO	
Descriptor	**2 º de ESO**
Proporcionalidad numérica	Bloque Números y Álgebra 5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra 6. Analizar procesos matemáticos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos comunicarlos y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables y operar con expresiones algebraicas.
	7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.
Representación en el plano	-
Análisis de funciones	Bloque Funciones 1. Comprender el concepto de función. Utilizar las diferentes formas de presentación y reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales: reconocer, representar y analizar las funciones lineales o afín, utilizándolas para resolver problemas. 2. Reconocer, representar y analizar las funciones lineales o afín, utilizándolas para resolver problemas.
Uso de las tecnologías	Bloque de Números y Álgebra 7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.
Uso de las tecnologías	Bloque Funciones 2. Reconocer, representar y analizar las funciones lineales o afín, utilizándolas para resolver problemas. Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 14. Criterios de evaluación 2 º ESO.

Primer Ciclo de ESO

Descriptor	3º de ESO Enseñanzas Aplicadas y Académicas
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra 4. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas gráficas o recursos tecnológicos y valorando y contrastando los resultados obtenidos.
Representación en el plano	Bloque Geometría 1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.
Análisis de funciones	Bloque Funciones 1. Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. 2. Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 15. Criterios en 3º de ESO. Enseñanzas Académicas y Aplicadas

Segundo Ciclo de ESO

Descriptor	4º de ESO Enseñanzas Académicas
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Bloque Geometría 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.
Representación en el plano	Bloque Geometría 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.

Segundo Ciclo de ESO (continuación)

Descriptor	4º de ESO Enseñanzas Académicas (continuación)
Análisis de funciones	Bloque Funciones 2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.
Uso de las tecnologías	Bloque Geometría 3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas. Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 16. Contenidos en 4º de ESO Enseñanzas Académicas.

Segundo Ciclo de ESO

Descriptor	4º de ESO Enseñanzas Aplicadas
Proporcionalidad numérica	Bloque Números y Álgebra 1. Conocer y utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades y aproximaciones, para resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico recogiendo, transformando e intercambiando información. 3. Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando ecuaciones de distintos tipos para resolver problemas proporcionales.
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra 2. Utilizar con destreza el lenguaje algebraico, sus operaciones y propiedades.
Representación en el plano	Bloque Funciones 1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica.
Análisis de funciones	Bloque Funciones 1. Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. 2. Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 17. Contenidos mínimos en 4º de ESO. Enseñanzas Aplicadas.

2.3. Criterios de evaluación en Bachillerato

Como el bloque de Métodos y Actitudes en Matemáticas es común a todos los cursos y se debe trabajar con todos los contenidos, el criterio abajo indicado, aunque se tiene en cuenta no se incluye en las tablas siguientes, en ellas se colocará el título del bloque. En nuestro caso, el criterio está relacionado con el descriptor *Uso de tecnologías* y es:

13. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

En las Tablas 18-20, se exponen los criterios de evaluación para los dos cursos de Bachillerato de la Modalidad de Ciencias y para 1º de la Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. El 2ºcurso de esta opción se excluye ya que no tiene contenidos asociados con las ecuaciones de la recta.

Bachillerato

Descriptor	1º de Bachillerato – Modalidad de Ciencias
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra 4. Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales, utilizando recursos algebraicos (ecuaciones, inecuaciones y sistemas) e interpretando críticamente los resultados. Bloque Geometría 3. Manejar la operación del producto escalar y sus consecuencias. Entender los conceptos de base ortogonal y ortonormal. Distinguir y manejarse con precisión en el plano euclídeo y en el plano métrico, utilizando en ambos casos sus herramientas y propiedades. 4. Interpretar analíticamente distintas situaciones de la geometría plana elemental, obteniendo las ecuaciones de rectas y utilizarlas, para resolver problemas de incidencia y cálculo de distancias.
Representación en el plano	Bloque Geometría 4. Interpretar analíticamente distintas situaciones de la geometría plana elemental, obteniendo las ecuaciones de rectas y utilizarlas, para resolver problemas de incidencia y cálculo de distancias.
Análisis de funciones	Bloque Análisis 3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 18. Criterios mínimos en 1º de Bachillerato – Modalidad de Ciencias.

Bachillerato

Descriptor	1º de Bachillerato – Modalidad de Ciencias Sociales
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra 3. Transcribir a lenguaje algebraico o gráfico situaciones relativas a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas y herramientas tecnológicas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas en contextos particulares.
Representación en el plano	-
Análisis de funciones	Bloque Análisis 3. Calcular límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias. 5. Conocer e interpretar geométricamente la tasa de variación media en un intervalo y en un punto como aproximación al concepto de derivada y utilizar las reglas de derivación para obtener la función derivada de funciones sencillas y de sus operaciones.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 19. Criterios mínimos en 1º de Bachillerato – Modalidad de Ciencias Sociales.

Bachillerato

Descriptor	2º de Bachillerato – Modalidad de Ciencias
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Bloque Geometría 1. Resolver problemas geométricos espaciales, utilizando vectores. 2.Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio.
Representación en el plano	Bloque Geometría 2.Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio.
Análisis de funciones	Bloque Análisis 2. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos, de cálculo de límites y de optimización.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 20. Criterios mínimos en 2ºde Bachillerato – Modalidad de Ciencias.

Capítulo 3

Estándares de aprendizaje de las ecuaciones de la recta en el currículo vigente

En este capítulo se indican los estándares de aprendizaje evaluables establecidos por el currículo vigente. Se sigue la metodología establecida en el capítulo anterior utilizando los mismos descriptores y analizando los mismos cursos.

3.1. Estándares de aprendizaje evaluables en Educación Primaria

En las siguientes tablas se indican los estándares de aprendizaje evaluables para cada curso del Tercer Ciclo de la Educación Primaria.

Tercer Ciclo Educación Primaria

Descriptor	**5 º**
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	-
Representación en el plano	Bloque Números y Álgebra: 1.7.Representa números en la recta numérica. Bloque Geometría: 1.4. Reconoce y construye rectas, semi-rectas y segmentos. 1.5. Reconoce y construye (utilizando escuadra y cartabón) líneas paralelas y perpendiculares. 1.7. Reconoce y construye las posiciones relativas de rectas y circunferencias. 5.1. Describe y ejecuta recorridos en un plano. 5.2. Identifica o localiza puntos en una cuadricula utilizando coordenadas cartesianas.
Análisis de funciones	-
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y actitudes en Matemáticas 12.1 Utiliza herramientas tecnológicas para la realización de cálculos numéricos, para aprender y para resolver problemas. 12.2. Utiliza la calculadora para la realización de cálculos numéricos, para aprender y para resolver problemas.

Tabla 21. Estándares de Aprendizaje Evaluables. 5 º Primaria.

Tercer Ciclo Educación Primaria

Descriptor	**6 º**
Proporcionalidad numérica	Bloque Números y Álgebra 7.3 Calcula el porcentaje de una cantidad. 7.4 Calcula aumentos y disminuciones porcentuales.
Expresiones algebraicas	-
Representación en el plano	-
Análisis de funciones	Bloque Números y Álgebra 7.7 Calcula, utilizando la tecla % de la calculadora, un porcentaje, un aumento y una disminución porcentual.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y actitudes en Matemáticas 12.1 Utiliza herramientas tecnológicas para la realización de cálculos numéricos, para aprender y para resolver problemas. 12.2 Utiliza la calculadora para la realización de cálculos numéricos, para aprender y para resolver problemas.

Tabla 22. Estándares de Aprendizaje Evaluables. 6 º Primaria.

3.2. Estándares de aprendizaje evaluables en ESO

En las tablas siguientes se indican los estándares de aprendizaje evaluables para los cursos de la ESO, asociados a los descriptores correspondientes.

Como el bloque de Métodos y Actitudes en Matemáticas es común a todos los cursos y con él se deben trabajar todos los contenidos, en las tablas de esta sección se colocarán solo el título del bloque, que sustituye a los estándares de aprendizajes a continuación citados:

11.1. Utiliza la calculadora con pericia para realizar cálculos, buscar regularidades o propiedades numéricas.

11.2. Utiliza programas o recursos ofimáticos para analizar propiedades geométricas, organizar datos o asociar gráficos a situaciones o problemas.

Primer Ciclo de ESO	
Descriptor	**1º de ESO**
Proporcionalidad numérica	Bloque Números y Álgebra 4.1 Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones.
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra 3.1. Realiza operaciones combinadas entre números enteros, decimales y fraccionarios, con eficacia, bien mediante el cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o medios tecnológico utilizando la notación más adecuada y respetando la jerarquía de operaciones. 3.2. Desarrolla estrategias de cálculo mental para realizar cálculos exactos o aproximados valorando la precisión exigida en la operación o en el problema.
Representación en el plano	Bloque Geometría 1.1. Reconoce la posición relativa de dos o más rectas en el plano y las propiedades que dicha posición se derivan: paralelismo, ángulos, perpendicularidad en construcciones geométricas.
Análisis de funciones	Bloque Números y Álgebra 4.1 Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones. Bloque Funciones 1.1. Localiza puntos en el plano a partir de sus coordenadas y nombra puntos del plano escribiendo sus coordenadas. 2.1 Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 23. Estándares de Aprendizaje Evaluables. 1 º de ESO.

Primer Ciclo de ESO	
Descriptor	**2º de ESO**
Proporcionalidad numérica	Bloque Números y Álgebra 5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra 6.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas y opera con ellas. 6.2. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones. 7.1 Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) soluciones de la misma.
Representación en el plano	-
Análisis de funciones	Bloque Funciones 1.1. Reconoce si una gráfica representa o no una función. 1.2 Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características. 1.3. Relaciona las diferentes expresiones de una función. 2.1. Reconoce y representa una función lineal o afín de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente. Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica o tabla de valores. Describe la ecuación correspondiente a la relación lineal o afín existente entre dos magnitudes y la representa.
Uso de las tecnologías	Bloque de Números y Álgebra 7.2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.
Uso de las tecnologías	Bloque Funciones 2.4 Estudia situaciones reales sencillas, apoyándose en recursos tecnológicos, identifica el modelo matemático funcional (Lineal o afín) más adecuado para explicarlas y realiza predicciones y simulaciones sobre su comportamiento. Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 24. Estándares de Aprendizaje Evaluables. 2 º de ESO.

Primer Ciclo de ESO

Descriptor	3º de ESO. Enseñanzas Académicas y Aplicadas
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra 4.1 Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.
Representación en el plano	Bloque Geometría 1.2 Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante.
Análisis de funciones	Bloque Funciones 1.1 Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas. 1.2 Identifica aspectos relevantes de una gráfica (dominio, crecimiento, máximo, …) interpretándolos dentro de su contexto. 1.3 Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto. 1.4 Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente. 3.1 Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto-pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente. 3.2 Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. 3.3 Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 25. Estándares de Aprendizaje Evaluables. 3 º de ESO. Enseñanzas Académicas y Aplicadas.

Segundo Ciclo de ESO

Descriptor	4º de ESO. Enseñanzas Académicas y Aplicadas
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Bloque Geometría 3.1. Establece correspondencia analítica entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos.
Representación en el plano	Bloque Geometría 3.5 Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad.
Análisis de funciones	Bloque Funciones 2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales. 2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas. 2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes.
Uso de las tecnologías	Bloque Geometría 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características. Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 26. Estándares de Aprendizaje Evaluables. 4 º de ESO. Enseñanzas Académicas.

Segundo Ciclo de ESO

Descriptor	4º de ESO. Enseñanzas Aplicadas
Proporcionalidad numérica	Bloque Números y Álgebra 1.6. Aplica porcentajes a la resolución de problemas cotidianos y financieros y valora el empleo de medios tecnológicos cuando la complejidad de los datos lo requiera. 1.7. Resuelve problemas de la vida cotidiana en los que intervienen magnitudes directa e inversamente proporcionales.

Segundo Ciclo de ESO (continuación)

Descriptor	4º de ESO. Enseñanzas Aplicadas
Proporcionalidad numérica (continuación)	3.1. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra 2.1. Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.
Representación en el plano	Bloque Funciones 1.3. Identifica, estima o calcula elementos característicos de estas funciones (cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad).
Análisis de funciones	Bloque Funciones 1.2. Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcional inversa y exponencial. 1.3. Identifica, estima o calcula elementos característicos de estas funciones (cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad). 1.6. Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, y exponenciales. 2.1. Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales. 2.2. Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas. 2.4. Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes en casos sencillos, justificando la decisión.
Uso de las tecnologías	Bloque Funciones 2.5. Utiliza con destreza elementos tecnológicos específicos para dibujar gráficas. Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 27. Estándares de Aprendizaje Evaluables. 4 º de ESO. Enseñanzas Aplicadas.

3.3. Estándares de aprendizaje evaluables en Bachillerato

En las Tablas 28-30 se exponen los estándares de aprendizaje evaluables para los dos cursos de Bachillerato de la Modalidad de Ciencias y para 1er curso de la Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. Al igual que se hizo en capitulo anterior, el 2º curso de la Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales se excluye ya que no tiene contenidos asociados con las ecuaciones de la recta.

Así mismo, el bloque de Métodos y Actitudes en Matemáticas, es común para todos los contenidos. Por ello, y aunque se tiene en cuenta, no se indican en las tablas siguientes. Sólo se colocara el título del bloque. Los estándares de aprendizaje evaluables asociado al descriptor *Uso de las tecnologías* son:

13.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.

13.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas defunciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.

13.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.

13.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas.

Bachillerato

Descriptor	1ºde Bachillerato – Modalidad Ciencias
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra 4.1. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica un sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve, mediante el método de Gauss, en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas. 4.2. Resuelve problemas en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones (algebraicas y no algebraicas) e inecuaciones (primer y segundo grado), e interpreta los resultados en el contexto del problema. Bloque Geometría 3.1. Emplea con asiduidad las consecuencias de la definición de producto escalar para normalizar vectores, calcular el coseno de un ángulo, estudiar la ortogonalidad de dos vectores o la proyección de un vector sobre otro. 3.2.Calcula la expresión analítica del producto escalar, del módulo y del coseno del ángulo.

Bachillerato (continuación)

Descriptor	I de Bachillerato – Modalidad de Ciencias (continuación)
Expresiones algebraicas (continuación)	4.1. Calcula distancias, entre puntos y de un punto a una recta, así como ángulos de dos rectas. 4.2. Obtiene la ecuación de una recta en sus diversas formas, identificando en cada caso sus elementos característicos
Representación en el plano	Bloque Geometría 4.3. Reconoce y diferencia analíticamente las posiciones relativas de las rectas.
Análisis de funciones	Bloque Análisis 3.1.Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 28. Estándares de Aprendizaje en 1º de Bachillerato – Modalidad Ciencias.

Bachillerato

Descriptor	1º de Bachillerato – Modalidad de Ciencias Sociales
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Bloque Números y Álgebra 3.1. Utiliza de manera eficaz el lenguaje algebraico para representar situaciones planteadas en contextos reales. 3.2. Resuelve problemas relativos a las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones. 3.3. Realiza una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos y los expone con claridad.
Representación en el plano	
Análisis de funciones	Bloque Análisis 3.2. Calcula, representa e interpreta las asíntotas de una función en problemas de las ciencias sociales. 5.1. Calcula la tasa de variación media en un intervalo y la tasa de variación instantánea, las interpreta geométricamente y las emplea para resolver problemas y situaciones extraídas de la vida real. 5.2. Aplica las reglas de derivación para calcular la función derivada de una función y obtener la recta tangente a una función en un punto dado.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 29. Estándares de Aprendizaje en 1º de Bachillerato – Modalidad de Ciencias Sociales.

Bachillerato

Descriptor	2º de Bachillerato – Modalidad Ciencias
Proporcionalidad numérica	-
Expresiones algebraicas	Bloque Geometría 1.1.Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. 2.1.Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. 2.2.Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. 2.4.Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.
Representación en el plano	Bloque Geometría 2.3. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos.
Análisis de funciones	Bloque Análisis 2.2. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.
Uso de las tecnologías	Bloque Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas

Tabla 30. Estándares de Aprendizaje en 2ºde Bachillerato – Modalidad Ciencias.

Capítulo 4

Ejercicios, problemas y cuestiones sobre las ecuaciones de la recta en los libros de texto y su relación con las funciones en el currículo vigente

Una vez culminado el estudio de la evolución de las ecuaciones de la recta en el currículo vigente en cuanto a contenido, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables, en este capítulo se analizan los ejercicios, problemas y cuestiones tipo que se encuentran en los libros de texto desde 2º de ESO hasta 2º de Bachillerato.

El objetivo es verificar que los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables establecidos por el currículo vigente están reflejados en los libros de texto. En este contexto, se entiende como ejercicio, una actividad cuya resolución parte de un algoritmo o método; generalmente suelen ser repetitivos. Los problemas, en cambio no, siguen un método, es necesario hacer uso de los conocimientos previos para abordar su resolución.

4.1. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de ESO

Para el estudio de los ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre las ecuaciones de la recta en 2º de ESO se usa como libro de referencia el utilizado en el centro. Se trata del libro Matemáticas 2 ESO, Proyecto Savia de la editorial SM.

No hay un tema específico, los contenidos se trabajan en la *Unidad 8 Funciones*, se estudia en dos secciones:

- Funciones lineales. Pendiente y ordenada en el origen
- Ecuación de la recta. Rectas paralelas y secantes

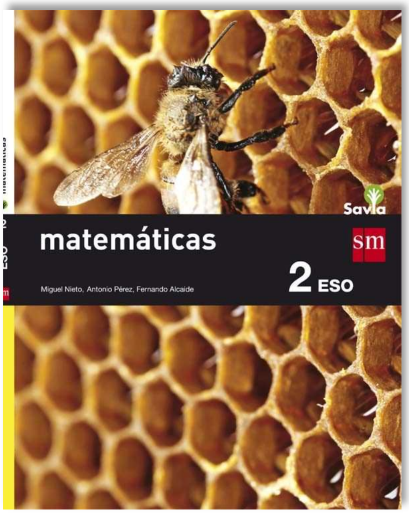


Figura 1. Libro de texto 2º de ESO.

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Se propone calcular la pendiente de una recta, dados dos de sus puntos. .

Ejemplo: Ejercicio 21. Página 167.

21. Calcula, en cada caso, la pendiente de la recta que pasa por los puntos indicados.

a) $A(5, 1)$ y $B(7, -7)$

b) $A(-1, 3)$ y $B(4, 23)$

c) $A(1, 1)$ y $B(-3, 9)$

d) $A(0, 4)$ y $B(4, -32)$

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Se introduce, a través del concepto de función lineal, la ecuación explícita de la recta y los elementos que la definen: pendiente y ordenada en el origen.

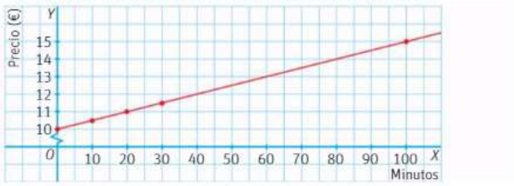
Ejemplo: Ejemplo, Página 166

Ejemplo ▸ Javier ha contratado una oferta de teléfono pagando una cuota fija de 10 € y una cuota por minuto de llamada de 0,05 €.

La fórmula que relaciona los minutos hablados y el total a pagar es $y = 10 + 0{,}05x$.

Minutos (x)	0	10	20	30	...	100
Precio (y)	10	10,5	11	11,5	...	15

Al representar los puntos de la tabla, se observa que están alineados.



- El coeficiente de la variable x es la pendiente de la recta, $m = 0{,}05$.
- La ordenada en el origen es $n = 10$, que coincide con la ordenada del punto de corte de la función con el eje Y, (0, 10).

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Se introduce el concepto de ecuación explícita, asociado a la pendiente y ordenada en el origen. Se muestra un gráfico, pero en él no se aprecia el corte de la recta con el eje (ordenada en el origen)

Ejemplo: Ejemplo, Página 168

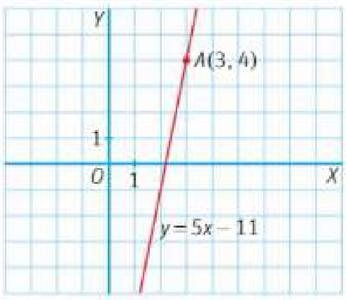
Ejemplo ▸ Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3, 4)$ y cuya pendiente es $m = 5$.

Como la pendiente es $m = 5$, la ecuación de la recta será $y = 5x + n$.

Como pasa por el punto $A(3, 4)$, la ecuación debe cumplirse para $x = 3$ e $y = 4$. Sustituimos estos valores en la ecuación de la recta y se despeja n:

$$4 = 5 \cdot 3 + n \Rightarrow 4 = 15 + n \Rightarrow n = 4 - 15 = -11$$

Por tanto, la ecuación de la recta es $y = 5x - 11$.



Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: El objetivo es determinar si un punto pertenece a una recta cuya ecuación está expresada en forma explícita.

Ejemplo: Ejercicio 58. Página 176

Funciones lineales. Ecuación de la recta

58. Estudia si el punto $A(5, -8)$ y el punto $B(-3, -7)$ pertenecen a cada una de las siguientes rectas.

a) $y = 2x - 2$ c) $y = 2 - 2x$

b) $y = 2x - 1$ d) $y = \frac{-59}{8} - \frac{x}{8}$

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Se propone calcular la ecuación de varias rectas. Se trabajan todos los casos posibles: dos puntos, punto y pendiente, punto y ordenada en el origen.

Ejemplo: Ejercicio 26. Página 169.

26. Calcula la ecuación de cada recta a partir de los siguientes datos.

a) Pasa por $A(1, 4)$ y $B(5, -4)$.

b) Su pendiente es 6 y pasa por $(2, -5)$.

c) Pasa por $(-1, -4)$ y su ordenada en el origen es $\frac{2}{3}$.

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Estudio de la posición relativa. Nótese que la ecuación no siempre se da en forma explícita. Se presenta la forma continua de la ecuación de la recta, aunque no está formalizado ese concepto.

Ejemplo: Ejercicio 71. Página 177.

71. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas sin representarlas gráficamente sobre un mismo plano cartesiano.

a) $\begin{cases} r: y-4=-8(x+2) \\ s: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+5}{-16} \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: y=3(x+2)-5x \\ s: y-1=\dfrac{9x-7}{3} \end{cases}$

Actividad □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Problema contextualizado en el que se pide a partir de una situación cotidiana identificar la función.

Ejemplo: Ejercicio 84. Página 178.

84. Alquilar un coche cuesta 30 €, a lo que hay que sumarle 10 € por cada 100 km recorridos.

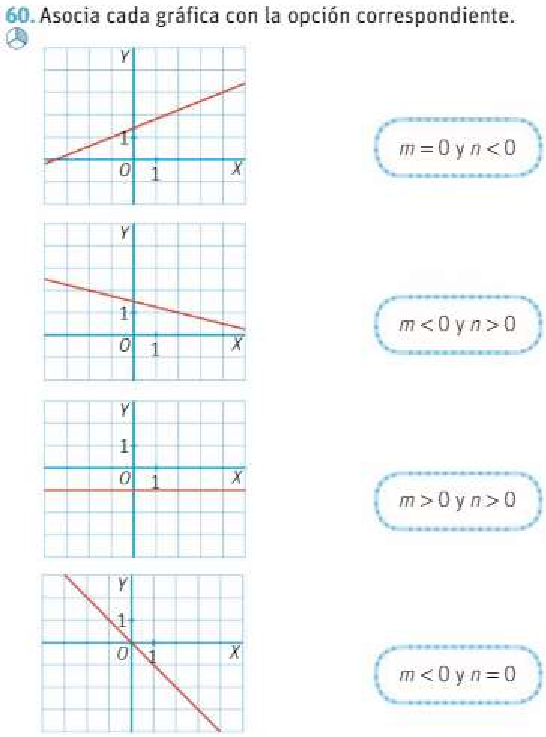
a) Escribe la función que permite calcular el coste del alquiler en función de los kilómetros recorridos.

b) Representa la gráfica de la función.

Actividad ☐ Ejercicio ☐ Problema ■ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Se propone asociar las gráficas con su ecuación.

Ejemplo: Página 176. Ejercicio 60.



4.2. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 3º de ESO

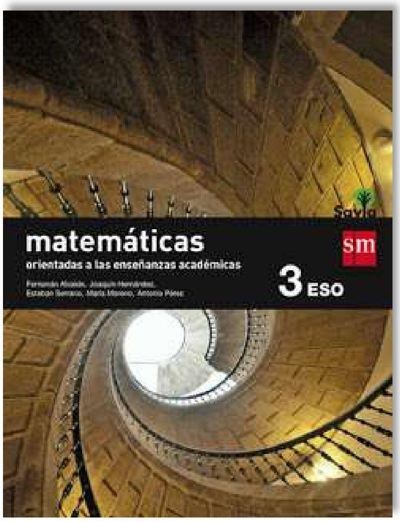


Figura 2. Libro de texto 3º de ESO

Para el análisis de los ejercicios, problemas y cuestiones tipo, seguimos utilizando como texto de referencia los libros de la editorial SM, Proyecto Savia. En este caso utilizamos Matemáticas 3 ESO orientadas a las Enseñanzas Académicas. Al igual que en el curso anterior, no existe un tema específico para las ecuaciones de la recta. Los contenidos en este caso están incluidos en la *Unidad 12 Funciones lineales y cuadráticas*, dentro de los apartados:

- Funciones lineales.
- Ecuaciones de la recta.
- Posición relativa de las rectas.

En este curso no encontramos problemas contextualizados, aunque sí hay ejercicios y problemas con un nivel de complejidad superior.

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Se pide escribir la ecuación de la recta, estudiando todas las posibilidades: dados dos puntos, la pendiente y la ordenada en el origen, la pendiente y un punto. Sólo piden la ecuación explícita y general, aunque ya se han formalizado los conceptos de la ecuación que pasa por dos puntos y la ecuación punto-pendiente

Ejemplo: Ejercicio 61 y 62, Página 264.

61. Escribe la ecuación explícita de las rectas que tienen estas características.

a) La pendiente es -3 y la ordenada en el origen es 2.

b) La pendiente es 2 y pasa por el punto $A(1, 4)$.

c) La ordenada en el origen es -1 y pasa por el punto $A(1, 4)$.

d) La pendiente es -1 y pasa por el punto $A(0, 3)$.

62. Calcula la ecuación explícita y general de las siguientes rectas.

a) Recta que pasa por los puntos $A(-1, 4)$ y $B(2, 7)$.

b) Recta que pasa por los puntos $A(5, 1)$ y $B(7, 1)$.

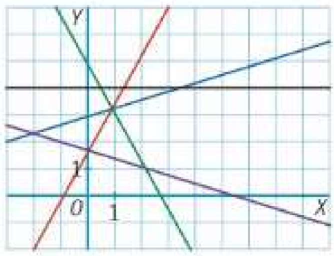
c) Recta que pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(2, 7)$.

Actividad □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación

Descripción: Se propone diferenciar la función lineal, función constante y de proporcionalidad directa.

Ejemplo: Ejercicio 57. Página 264.

57. Ordena de menor a mayor las pendientes de las siguientes rectas.



¿Qué rectas pasan por el origen? ¿Cuáles son horizontales?

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Se propone estudiar la posición relativa de dos rectas. El procedimiento esperado es calcular las ecuaciones explícitas, identificar la pendiente y compararlas.

Ejemplo: Ejercicio 63, Página 264.

63. Dados los siguientes pares de rectas, estudia si son paralelas o secantes. Calcula el punto de corte en aquellas que sean secantes.

a) $r: x + 3y = 3$
$s: 3x - 2y = -2$

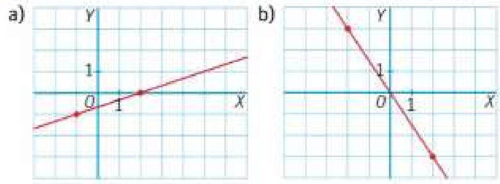
b) $r: -15x + 10y = 7$
$s: 9x - 6y = 7$

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Escribir la ecuación en tres formas: punto-pendiente, explícita y general, a partir de unas graficas. Es el único ejercicio de este tipo en el libro

Ejemplo: Ejercicio 64, Página 264.

64. Calcula la ecuación punto-pendiente de estas rectas y escribe sus ecuaciones explícita y general.



Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicio de posición relativa de las rectas, expresadas en forma de ecuación general, se debe calcular el valor de un parámetro para que cumplan cierta condición.

Ejemplo: Ejercicio 65, Página 265.

65. Calcula k para que las rectas sean del tipo indicado.

a) $2x - y + 1 = 0$ y $x + ky - 5 = 0$ son paralelas.

b) $-x + 5y + 3 = 0$ y $kx + 2y - 5 = 0$ sean secantes.

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicio de posiciones relativas. Proponen bastantes ejercicios de este tipo con variaciones del tipo: paralela a una recta y pasa por un punto, que es paralela a la bisectriz del primer cuadrante y pasa por un punto, calcular una recta de la hipotenusa de un triángulo, conociendo un punto y el área del triángulo

Ejemplo: Ejercicio 69, Página 265.

69. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de r: $2x + 5y - 16 = 0$ y s: $y = -4x + 1$ y es paralela a la recta t: $x + 8y - 5 = 0$.

Actividad □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Problema para trabajar las posiciones relativas de la recta

Ejemplo: Ejercicio 99, Página 269.

99. Los puntos $A(2, -3)$, $B(4, 3)$ y $C\left(5, \frac{k}{2}\right)$ están alineados.

Por tanto, el valor (o valores) de k es:

A. 12 B. −12 C. ±12 D. 12 y 6

4.3. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 4º de ESO

Figura 3. Libro de texto 3º de ESO.

Los ejercicios mostrados a continuación han sido tomados del libro de Matemáticas de la editorial SM, Proyecto Savia para 4º de ESO orientado a las Enseñanzas Académicas. Los contenidos se trabajan en la *Unidad 7*, *Geometría Analítica*, y pueden resumirse en:

- Vectores y operaciones.
- Ecuaciones de la recta.
- Problemas de incidencia.

En este curso se introduce por primera vez en el currículo el concepto de vectores y su operativa y, posteriormente se relaciona con las rectas, particularmente con la ecuación vectorial En ese contexto, se define el vector director como un elemento indispensable para determinar la ecuación.

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicio resuelto de cálculo de las coordenadas de un extremo del vector posición. Posteriormente cuando se trabaje con las ecuaciones de la recta, se trabajará a la inversa, darán las coordenadas de los puntos y se pedirá las coordenadas del vector

Ejemplo: Ejercicio 2, Página 137

2. Las coordenadas del vector libre $\vec{u}$ son (–5, 4), y las del origen A de uno de sus representantes, (4, –6). Calcula las coordenadas del extremo B de ese representante.

$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \Rightarrow \vec{OB} = (4, -6) + (-5, 4) = (-1, -2)$

Por tanto, las coordenadas de B son (–1, –2).

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Comprobar que un punto pertenece a la recta, el objetivo es consolidar el concepto de un punto como un par ordenado y verificar que si ese punto pertenece a la recta dada debe verificar la ecuación

Ejemplo: Ejercicio 63. Página 149

63. Comprueba si el punto $B(4, -6)$ pertenece a alguna de las rectas siguientes.

a) $y = 9 - 3x$ b) $5x + 3y - 2 = 0$

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Hallar un punto, vector director, vector normal a partir de la ecuación de la recta dada. Se presentan variaciones del ejercicio donde lo que se pide es calcular la pendiente y la ordenada en el origen. Fundamental, poder identificar en las ecuaciones el vector director y un punto y a partir de allí empezar a relacionar conceptos.

Ejemplo: Ejercicios 64 y 65 Página 149

64. Determina el vector director, un vector normal y un punto de las siguientes rectas.

a) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+4}{5}$ c) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$

b) $(x, y) = (4, 0) + t(2, -6)$ d) $4x - y = 0$

65. Obtén un punto, un vector director y la pendiente de la recta de ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5t \end{cases}$$

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Escribir de todas las formas posibles la ecuación de la recta, partiendo de otras ecuaciones de rectas o punto, vector y/o pendiente. Obsérvese que este último caso es reciproco del ejercicio 64

Ejemplo: Ejercicios 66 y 67 página 149.

66. Escribe de todas las formas posibles la ecuación de las siguientes rectas.

a) Pasa por el punto $A(3, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (5, -2)$.

b) Pasa por el punto $A(-2, 2)$ y su pendiente es $m = -3$.

67. Escribe de todas las formas posibles la ecuación de las rectas:

a) $r: 3x - 2y = -10$ c) $r: y = -2x + 3$

b) $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{2}$ d) $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicio resuelto de posición relativa de las rectas. En el libro se proponen ejercicios muy similares, salvo que utilizan otro lenguaje o lo asocian a contenidos geométricos, por ejemplo. En vez de hablar de punto (0,0) hablan de origen de coordenadas. El punto lo establecen con la intersección de dos rectas o piden hallar las medianas y baricentro de un triángulo

Ejemplo: Ejercicio 75 y 82 página 150.

75. Dados los puntos $A(-1, 3)$, $B(4, 0)$ y $C(-1, 2)$:

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela a la que pasa por B y C.

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a la recta que pasa por A y C y que pasa por B.

a) Se calcula la recta que pasa por B y C:

$$\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y}{2-0} \Rightarrow 2x-8=-5y \Rightarrow 2x+5y=8$$

Las paralelas a esta recta son: $2x + 5y + k = 0$

Como debe pasar por A, se sustituyen sus coordenadas y se obtiene el término k:

$$2(-1) + 5 \cdot 3 + k = 0 \Rightarrow k = -13$$

La recta buscada es: $2x + 5y - 13 = 0$

b) Se calcula la recta que pasa por A y C:

$$\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{2-3} \Rightarrow x+1=0$$

Es una recta vertical. Por tanto, todas las perpendiculares a ella serán horizontales y tendrán por ecuación $y + k = 0$.

Como pasa por B: $0 + k = 0 \Rightarrow k = 0$

La recta buscada es: $y = 0$ (Eje de abscisas)

82. Los lados de un triángulo vienen dados por las rectas $3x - y - 6 = 0$, $3x + y - 18 = 0$ e $y = 0$.

a) Halla las coordenadas de los vértices.

b) Clasifica el triángulo en función de sus lados.

c) Halla las ecuaciones de las medianas.

d) Halla el baricentro del triángulo.

Actividad □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicio de análisis, que para resolverse se debe recurrir a otros conocimientos matemáticos a parte de los trabajados en la unidad

Ejemplo: Ejercicio 96, página 151.

96. Si m y b son números reales y $mb > 0$, la recta de ecuación $y = mx + b$ no puede contener al punto:

A. $(0, 2011)$ **C.** $(20, -10)$

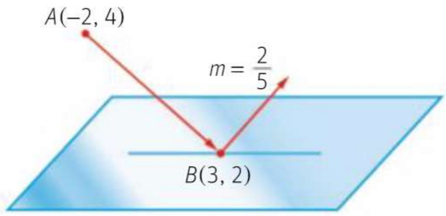
B. $(20, 10)$ **D.** $(2011, 0)$

Actividad ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Ejercicio contextualizado donde se debe determinar, la ecuación de la recta: entre dos puntos, pendiente y punto, es horizontal y pasa por un punto

Ejemplo: Ejercicio 93. Página 151

93. Un rayo de luz incide en el espejo con una trayectoria rectilínea determinada por los puntos $A(-2, 4)$ y $B(2, 3)$, siendo B el punto de contacto con el espejo, y A, el punto de origen. Al reflejarse, la pendiente de la recta que describe su trayectoria es $\frac{2}{5}$.



a) Escribe las ecuaciones de las rectas que determinan los rayos incidente y reflejado.

b) Halla un vector director de cada una de ellas y el ángulo que forman.

c) La posición del espejo forma el mismo ángulo con el rayo incidente y el reflejado. Encuentra la ecuación de la recta que la define.

4.4. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 1º de Bachillerato

En el libro de texto de Matemáticas de 1º Bachillerato, de la editorial SM, Proyecto Savia, se observa que los contenidos referidos a la ecuación de la recta se abordan en la *Unidad 5 Geometría Analítica*. Tanto los contenidos como los ejercicios son muy similares a los descritos para el curso anterior. Se introduce contenidos nuevos como:

- Ecuación normal de la recta.
- Ecuaciones para los haces de rectas secantes y paralelas.
- Distancia entre puntos, entre punto y recta y entre dos rectas.
- Ángulos entre dos rectas.

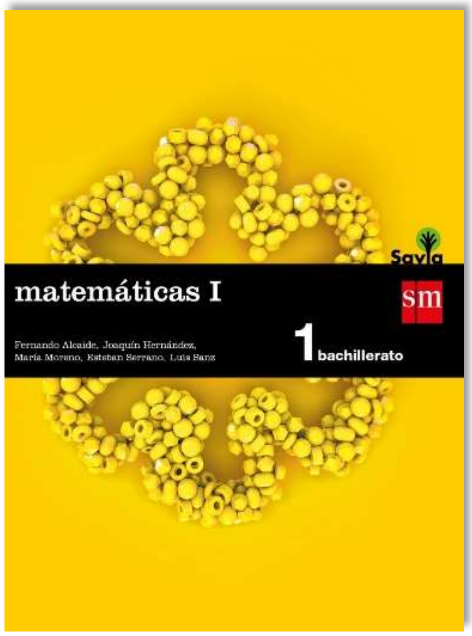


Figura 4. Libro de texto 1º de Bachillerato

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Este es un ejercicio típico de iniciación de la unidad, se ha observado en otros cursos. Como novedad en este curso piden calcular un punto. También introducen otra forma de identificar a las rectas y cambia la nomenclatura del parámetro de la ecuación paramétrica

Ejemplo: Ejercicio 66. Página 138

66. Para cada una de las siguientes rectas, indica si los puntos $P(-2, 1)$ y $Q(3, -1)$ pertenecen o no a ellas y calcula un punto más de cada una.

a) $r_1 : (x, y) = (7, -2) + \lambda(4, -1)$

b) $r_2 : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$

c) $r_3 : 2x + 5y = 1$

d) $r_4 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{5}$

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Cálculo de la ecuación partiendo de diferentes datos. (2 puntos, punto/vector, punto y posición de la recta). Incluyen el concepto del punto medio de un segmento que, aunque se vio en 4º de ESO, en este curso se ejercita más.

Ejemplo: Ejercicio 68. Página 138.

68. Para cada una de las siguientes rectas, determina la ecuación continua y la ecuación general.

a) Pasa por el punto $A(-3, -4)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (-1, 2)$.

b) Pasa por los puntos $P(2, -5)$ y $Q(5, 1)$.

c) Pasa por el origen de coordenadas y por el punto $B(-3, 4)$.

d) Pasa por el origen de coordenadas y por el punto medio del segmento de extremos $M(1, -3)$ y $N(5, 2)$.

e) Pasa por el punto $P(-2, 7)$ y es perpendicular al segmento de extremos $M(-1, -3)$ y $N(0, 4)$.

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicio donde se pide escribir la ecuación normal (Es un contenido nuevo) partiendo de un vector que no es director sino el normal y el punto debe determinarse.

Ejemplo: Ejercicio 74. Página 138.

74. Encuentra la ecuación normal y la ecuación general de la recta que tiene a $\vec{n} = (2, 4)$ como vector normal y pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ siendo $A(0, -2)$ y $B(-3, 0)$.

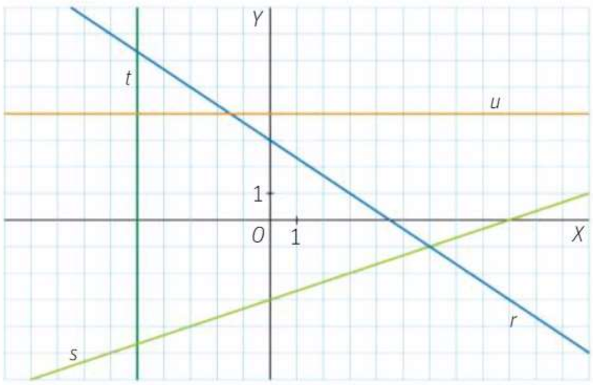
Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Ejercicio donde se une escribir la ecuación con los conceptos de posición relativas de rectas
Ejemplo: Ejercicios 82 y 83. Página 139.

82. Indica la pendiente de todas las rectas paralelas a la recta que pasa por los puntos $P(1, 2)$ y $Q(-1, -7)$.

83. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, 6)$ y es paralela a $r: \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación
Descripción: Ejercicio típico de indicar la pendiente y la ordenada, salvo que el estudiante debe extraer los datos de una gráfica, para lo cual debe dominar el sistema de coordenadas del plano.
Ejemplo: Ejercicio 76. Página 138.

76. Indica el valor de las pendientes y de las ordenadas en el origen de las rectas de la figura y determina, para cada una de ellas, su ecuación general.



Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicio para trabajar las posiciones relativas de las rectas y las ecuaciones. En el ejemplo se observa que la variación entre los diferentes apartados está en la forma de suministrar la información. También se encuentra otro ejercicio muy parecido a este, solo que lo que se estudia es la perpendicularidad

Ejemplo: Ejercicio 87 Página 139.

Encuentra la ecuación de las siguientes rectas paralelas a una dada.

a) Paralela a $2x+5y-5=0$ y que pasa por el punto $A(-2, 6)$.

b) Paralela al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-1, 4)$.

c) Paralela al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A(-1, 4)$.

d) Paralela a $r: 2x-y+12=0$ y que pasa por el origen de coordenadas.

e) Paralela a $r: \begin{cases} x=-1+3t \\ y=5+t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, 4)$.

f) Paralela a $r: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=1 \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, -2)$.

g) Paralela a la bisectriz del primer cuadrante y que tiene ordenada en el origen igual a 5.

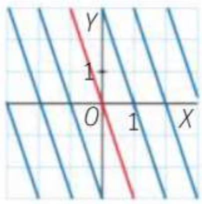
Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicio para el cálculo de la ecuación de los hace de rectas. Este es un contenido nuevo de este curso. Es una generalización de las ecuaciones de rectas paralelas y secantes

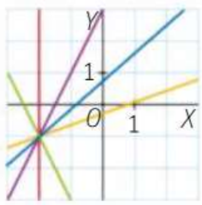
Ejemplo: Ejercicio 98. Página 140.

98. Determina las ecuaciones de los haces de las siguientes figuras.

a)



b)



Halla en cada uno de los haces anteriores la recta que pasa por el punto $P(-1, -2)$

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Cálculo de la distancia de un punto a la recta, dada en diferentes expresiones o que debe calcularse según los datos dados

Ejemplo: Ejercicio 105. Página 140.

Calcula la distancia del punto P a la recta r en los siguientes casos.

a) $P(-3,4)$ $\quad r: 2x+3y-5=0$

b) $P(0,-2)$ $\quad r: y=-2x+5$

c) $P\left(\frac{1}{2},-3\right)$ $\quad r: 2x-2y=-3$

d) $P(1,-2)$ $\quad r: \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-2-2\lambda \end{cases}$

e) $P(-1,0)$ y r es la recta que pasa por los puntos $A\left(\frac{1}{2},-3\right)$ y $B\left(-2,\frac{1}{2}\right)$

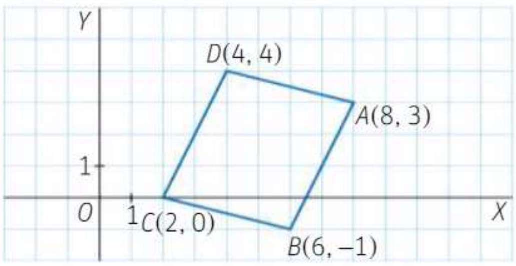
f) $P(3,-2)$ y r es la recta que forma un ángulo de 45° con el eje positivo de abscisas y que tiene ordenada en el origen igual a -2.

Actividad □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Actividad de síntesis donde se debe analizar los datos y relacionar con los contenidos trabajados (Posiciones perpendiculares y ecuaciones de la recta)

Ejemplo: Ejercicio 120. Página 141.

120. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí. Calcula las ecuaciones de las diagonales de la figura y comprueba si se trata o no de un rombo.

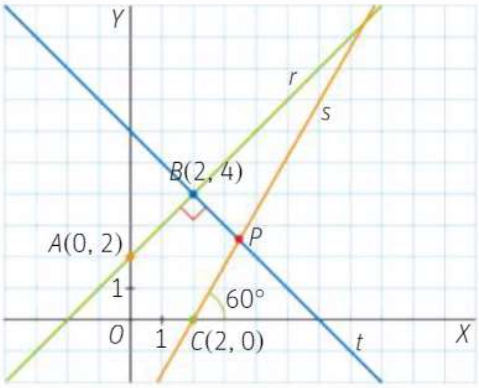


Actividad ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Ejercicio donde se trabajan todos los contenidos de la unidad, con el extra que los datos se deben obtener de la grafica

Ejemplo: Ejercicio 130. Página 142.

A partir de la información de la figura, calcula:



a) Las ecuaciones de las rectas r, s y t

b) El punto P de intersección entre s y t

c) El punto P' simétrico de P respecto de la recta r

d) El punto C' simétrico de C respecto de la recta r

e) El perímetro del cuadrilátero $PCC'P'$

f) La ecuación de la recta s' simétrica de s respecto la recta r

g) El ángulo que forman s y t.

h) La recta paralela a s que pasa por B.

i) Las rectas que pasan por el punto $D(-1, 3)$ y forman un ángulo de 30° con la recta r.

Actividad ☐ Ejercicio ☐ Problema ■ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Ejercicio para evaluar el dominio de los conceptos trabajados

Ejemplo: Ejercicio 135. Página 142.

135. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) Si la distancia de un punto a una recta es cero entonces obligatoriamente el punto está contenido en la recta.

b) Si la ecuación general de una recta no tiene término independiente entonces el origen de coordenadas pertenece a la recta.

c) La expresión $Ax + By + C = 0$ representa siempre una recta independientemente de los valores reales de A, B y C.

4.5. Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en 2º de Bachillerato

Figura 5. Libro de texto 2º de Bachillerato

Se ha utilizado como libro de referencia: Matemáticas II, de la editorial SM, Proyecto Savia, para el estudio de los ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre las ecuaciones de la recta. Los contenidos están incluidos en la *Unidad 11 Rectas y planos en el espacio*. En este curso, a diferencia de todos sus predecesores, se pasa del plano al espacio. Se trabajan las diferentes formas de las ecuaciones de la recta en el espacio y se introduce la ecuación del plano. Además, se estudian las posiciones relativas entre dos planos, entre una recta y un plano y entre dos planos en el espacio.

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Cálculo de las coordenadas de un vector. Este contenido se ha trabajado insistentemente en los cursos predecesores. En este caso, es que se trabaja con tres dimensiones

Ejemplo: Ejercicio 79. Página 298.

79. Del vector $\overrightarrow{PQ} = (4, -1, 2)$ se sabe que el extremo tiene coordenadas $Q(2, -3, -4)$. Calcula las coordenadas del origen P.

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Escribir las ecuaciones la recta, con la diferencia que los puntos están en el espacio

Ejemplo: Ejercicio 84. Página 298.

84. Escribe las ecuaciones paramétricas, la ecuación en forma continua y las ecuaciones implícitas de la recta:

a) Que pasa por los puntos $A(1, -2, 0)$ y $B(2, -3, -1)$.

b) Que pasa por el punto $A(-2, -2, 0)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u} = (-1, -1, 4)$.

c) Que pasa por el punto $A\left(-\frac{2}{3}, -2, \frac{1}{2}\right)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ejercicio para escribir la ecuación del plano. Este es un concepto nuevo.

Ejemplo: Ejercicio 94. Página 299.

94. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano:

a) Que pasa por el punto $A(-1, 3, 1)$ y lleva la dirección de los vectores $\vec{u}=(1,-1,3)$ y $\vec{v}=(-1,-1,4)$.

b) Que pasa por los puntos $A(1,-1,2)$, $B(2,0,-1)$ y $C(-3,1,0)$.

c) Que pasa por el punto $A\left(-\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$ y lleva la dirección de los vectores $\vec{u}=\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}\right)$ y $\vec{v}=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

d) Que contiene al triángulo de vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Ecuaciones en el plano. Este ejercicio es típico en los niveles previos para verificar si un punto pertenece a la recta. Ahora, se pide que se verifique que los puntos pertenecen al plano.

Ejemplo: Ejercicio 101. Página 299

101. Verifica si los siguientes puntos pertenecen o no a un mismo plano. En caso afirmativo, calcula su ecuación.

a) $A(2,1,1)$, $B(1,0,-2)$, $C(-1,2,0)$ y $D(-2,0,-5)$

b) $A(1,1,1)$, $B(-1,2,1)$, $C(2,-1,1)$ y $D(-2,2,2)$

c) $A(1,-1,1)$, $B(-1,-2,1)$, $C(3,-1,1)$ y $D(2,1,6)$

d) $A(1,-1,2)$, $B(2,0,-1)$, $C(-3,1,0)$ y $D(-3,3,3)$

Actividad ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación

Descripción: Estudio de la posición relativa entre tres planos. Hay ejercicios similares, variando a dos el número de plano, o estudiando la posición entre rectas y plano

Ejemplo: Ejercicio 104. Página 299

104. Estudia la posición relativa de los tres planos π, π' y π'' en los casos siguientes.

a) $\pi: 2x-y+z=0$, $\pi': 3x+y+4z=0$, $\pi'': x+y-z=3$

b) $\pi: 2x+y+z=0$, $\pi': x+y-z=0$, $\pi'': x+2z=1$

c) $\pi: x+y-z=0$, $\pi': 3x+2y+1=0$, $\pi'': x+2z+1=0$

d) $\pi: -2x-y+3z=3$, $\pi': 6x+3y-9z=-9$, $\pi'': -10x-5y+15z=15$

e) $\pi: 2x-y+z=0$, $\pi': x-2y+3z=1$, $\pi'': 3x-3y+4z=1$

f) $\pi: 2x-4y+6z+1=0$, $\pi': x+2y+z=0$, $\pi'': x-2y+3z-1=0$

g) $\pi: 2x-y+3z=4$, $\pi': x-2y-z=-7$, $\pi'': -2x+y-z=2$

h) $\pi: x+y-z=0$, $\pi': x-y+z=0$, $\pi'': x=0$

Actividad ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Problema

Ejemplo: Ejercicio 120. Página 300.

120. Dado el plano π: $6x + 4y - 3z - D = 0$:

a) Calcula el valor de D para que el plano pase por el punto $P(2, 0, 0)$.

b) Calcula las coordenadas de A, B y C, que son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano π.

c) Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices A, B y C.

d) Calcula las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices A, B y C.

Actividad ☐ Ejercicio ☐ Problema ■ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Para demostrar que se dominan los conceptos de posiciones relativas de rectas

Ejemplo: Ejercicio 118. página 300.

118. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) Dos rectas paralelas determinan un único plano.

b) Desde un punto exterior a una recta solo se puede trazar una paralela a ella.

c) Desde un punto exterior a una recta solo se puede trazar una perpendicular a ella.

d) Dos rectas que se cruzan no forman ningún ángulo.

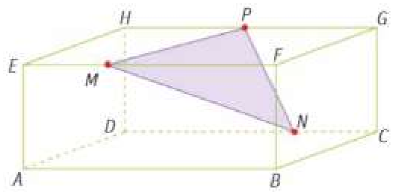
e) Dadas dos rectas que se cruzan y un punto exterior a ellas, solo hay una recta que pase por ese punto y toque a las dos rectas.

Actividad ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Ejercicio completo, donde se trabajan gran parte de los contenidos

Ejemplo: Ejercicio 141. Página 302

141. En el paralelepípedo de la figura se toma como referencia el origen A y los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$.



a) Calcula las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E, F, G y H.

b) Calcula las ecuaciones de los planos HGC y BCD.

c) Calcula las ecuaciones de las rectas que contienen a las diagonales DB y DG.

d) Calcula las coordenadas de:

P: punto medio del segmento HG

M: punto tal que $\overrightarrow{MF} = 2\overrightarrow{EM}$

N: punto tal que $\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{NC}$

e) Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo MPN.

f) Calcula la ecuación del plano determinado por los puntos M, P y N.

g) Calcula las ecuaciones de la recta que contiene al segmento MN.

Actividad ☐ Ejercicio ■ Problema ☐ Cuestión ☐ Situación

Descripción: Problema trabajar los conceptos de posición de incidencia en el plano

Ejemplo: Ejercicio 147. Página 302.

146. Escribe la condición que deben verificar a, b y c para que los puntos $A(1, 0, a)$, $B(1, b, 0)$ y $C(c, 0, 1)$ estén alineados.

147. ¿Qué condición deben verificar a, b y c para que $A(1, 0, a)$, $B(1, b, 0)$, $C(c, 0, 1)$ y $D(1, 1, 1)$ sean coplanarios?

Capítulo 5

Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

En este capítulo, se exponen los resultados de comparar los contenidos mínimos, criterios de evaluación y estándares evaluables, relacionados con las ecuaciones de la recta en el currículo vigente para ESO y Bachillerato y analizados en los capítulos 1, 2 y 3, con los contenidos observados en los libros de texto en el capítulo 4. El análisis expuesto a continuación se centra en contrastar la presencia y/o ausencia de contenidos y la coherencia entre éstos.

Asimismo, se compara este enfoque con los contenidos del libro *Álgebra lineal y geometría cartesiana* de J. de Burgos, que se tomará como libro de referencia.

5.1. Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto

En los libros de texto, el contenido básico se repite en todos los cursos, y los conceptos nuevos van introduciéndose por cursos paulatinamente, salvo en 2º de Bachillerato, donde hay un incremento en los nuevos contenidos.

A medida que se avanza en los cursos, se puede observar cómo los contenidos evolucionan de lo sencillo a lo complejo y de lo específico a lo general, siempre con un contenido común que se trabaja en todos los cursos.

En los primeros cursos de ESO, los contenidos de las ecuaciones de la recta están incluidos en el bloque de Funciones a través de la representación gráfica y los conceptos de función lineal, así como en el bloque de Números y Álgebra, mediante la proporcionalidad y el lenguaje algebraico. Posteriormente, a partir de 4º de ESO y en Bachillerato, se abordan desde el bloque de Geometría.

Al analizar el tema relacionado con las ecuaciones de la recta en el libro de referencia, se observa que éste tiene un enfoque geométrico. El capítulo comienza introduciendo axiomas y definiciones y, posteriormente profundiza en la geometría plana y tridimensional. Es un libro técnico dirigido a estudiantes universitarios. Profundiza mucho en los conceptos, el grado de abstracción es elevado y el lenguaje es formal. De los libros de texto analizados, el de 2º de Bachillerato es el más próximo en cuanto a contenidos. Comparando los dos libros de texto, se observa que ambos presentan una estructura común, las definiciones y conceptos se encuentran resaltados, seguidos de ejercicios resueltos y, finalmente, un grupo de ejercicios propuestos. La principal diferencia es que libro de referencia después de formalizar los contenidos hace comprobaciones y, en algunos casos, demostraciones, y tiene una sección con las soluciones de los ejercicios propuestos, a diferencia de los libros de texto de la etapa preuniversitaria analizados que no proporcionan los resultados.

Los libros de texto analizados para todos los niveles presentan enlaces hacia *applets* de GeoGebra. En cambio, en el libro de referencia no se observó comentario alguno hacia el uso de las tecnologías como forma de consolidar el aprendizaje.

En este contexto, es importante señalar que en el currículo existe un bloque común a todos los cursos, denominado *Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas*, que recoge la utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje. Éste tiene como criterio

Introducción de nuevos contenidos relacionados con las ecuaciones de la recta	
2º de ESO	Coordenadas cartesianas. Función lineal. Cálculo de pendiente. Ecuación explícita de la recta. Rectas paralelas y secantes.
3º de ESO	Cálculo de pendiente dados dos puntos. Ecuación punto-pendiente. Ecuación que pasa por dos puntos. Ecuación general. Posiciones relativas. Puntos de corte.
4º de ESO	Ecuación vectorial. Ecuación paramétrica, continua. Rectas coincidentes y perpendiculares. Estudio de posiciones relativas.
1º de Bachillerato	Ecuación normal. Estudio del sistema formado por las ecuaciones de las rectas. Haz de rectas secantes. Haz de rectas paralelas. Distancia entre puntos y rectas. Ángulos de dos rectas. Puntos y rectas simétricos. Lugares geométricos.
2º de Bachillerato	Elementos geométricos en el espacio. Ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita en el espacio. Ecuación del plano. Posiciones relativas entre planos, recta y plano, entre dos rectas, haces de rectas y planos. Problemas de incidencia y paralelismo.

Tabla 31. Contenidos nuevos de las ecuaciones de la recta que se introducen en el curso

de evaluación el empleo de herramientas tecnológicas adecuadas de forma autónoma, que se trabaja de forma transversal en la materia.

5.2. Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo

Los contenidos son trabajados en espiral: se parte de unos contenidos básicos y en cada curso se incorporan nuevos contenidos y/o se profundiza en los anteriores. En la Tabla 31, se indican los contenidos nuevos que se introducen por curso. Los contenidos ya trabajados forman parte de los contenidos de base del siguiente curso, pero con un nivel de complejidad mayor.

En el currículo se observa coherencia en los contenidos y como éstos evolucionan a través de los diferentes cursos. Por su parte, los libros de texto siguen las directrices que el currículo establece en la legislación vigente. Por ejemplo, en 2º y 3 º de ESO los contenidos de la recta en el currículo se encuentran en el bloque de Funciones, y, por tanto, se trabajan desde esa perspectiva.

En cuanto a contenidos, puede afirmarse que los libros de texto cumplen con lo exigido por la legislación e incluso aportan contenidos adicionales, que son introducidos antes de lo establecido en el currículo. Dichos contenidos se tratan inicialmente de forma somera y, posteriormente, cuando son exigidos en el currículo, se trabajan en profundidad. Por ejemplo, en el libro de texto de 2º de ESO se introducen los conceptos de rectas paralelas y secantes que no están recogidos en el currículo. Una situación similar ocurre en 3º de ESO: el libro de texto introduce de nuevo las rectas paralelas y secantes, e incluso profundiza en el análisis de los puntos de corte, aun cuando este contenido no está presente en el currículo.

Aunque en lo referente a contenidos curriculares no se detectaron ausencias en los libros de texto, sí se observó que en el currículo hay contenidos que no tienen asociados un criterio de evaluación o un estándar de aprendizaje evaluable. Por ejemplo, el uso de las tecnologías se incluye en los contenidos de algunos cursos, pero no en los criterios de evaluación o en los estándares evaluables y viceversa. En cualquier caso, la referencia al uso de las tecnologías en el currículo es abierta y no se concreta el uso de una determinada herramienta. Por una parte, esto es adecuado ya que la tecnología y los programas avanzan continuamente y la oferta de éstos es amplia, pero, por otra, no establece unos mínimos que sirvan de orientación.

Otro aspecto que permite a los libros de texto mantener la coherencia es el uso de una organización similar en todas las unidades didácticas. Esto permite que el proceso de aprendizaje siga un mismo patrón, que en nuestro caso se repite curso a curso, ya que los libros utilizados son de la misma editorial y proyecto educativo. Primero, se formalizan los conceptos después a través de ejemplos y actividades propuestas, éstos se consolidan y posteriormente se repite el proceso con contenidos nuevos. Cuando todos los contenidos han sido introducidos, se pasa a las actividades de práctica.

.

Parte II

Análisis de un proceso de estudio de las ecuaciones de la recta en 4º de ESO

Esta segunda parte del trabajo Fin de Máster está basada en el tema impartido durante el periodo de docencia de prácticas realizado con alumnos de 4º de ESO.

Se realiza un análisis didáctico de la resolución por parte de los alumnos de problemas de ecuaciones de la recta. Para ello, se divide esta parte en cuatro capítulos. En el primer capítulo se hace un análisis de los contenidos del libro sobre el tema de ecuaciones de la recta. En el segundo capítulo, se estudian los errores y dificultades previsibles en el aprendizaje. En el tercer capítulo, se describe el proceso de estudio. Por último, el cuarto capítulo analiza la experimentación y los resultados obtenidos.

Para finalizar, se incluyen la síntesis y conclusiones del proceso, así como algunas cuestiones abiertas extraídas del análisis

Capítulo 6

Ecuaciones de la recta en el libro de texto de referencia

En este capítulo se analizará el contenido correspondiente al tema 7 "*Geometría analítica*" del libro de texto de 4º de ESO Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas – Proyecto Savia de la editorial SM (ver Anexo I), que se ha utilizado para impartir las clases.

Para el análisis se utilizará como referencia el articulo *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta* (Godino, Font y Wilhelmi, 2006).

En primer lugar, se identificarán una serie de elementos o entidades primarias (objetos matemáticos, que pueden ser previos o emergentes) presentes en la práctica matemática. Posteriormente, se analizarán las secciones del tema de forma global.

6.1. Objetos matemáticos involucrados

Los objetos matemáticos involucrados se identificarán siguiendo las herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico expuestas en el texto de referencia antes indicado con la finalidad de establecer un sistema de referencia para su posterior comparación. Los objetos a estudiar son: el lenguaje (verbal, gráfico y simbólico), las situaciones, las reglas (conceptos, proposiciones y procedimientos) y los argumentos. Éstos se organizan en forma esquemática, pero es conveniente recordar que están relacionados entre sí.

Lenguaje
Verbal
Origen, extremo, coordenadas, módulo, dirección, sentido, vector fijo, vector normal, vector libre, vectores equipolentes, vector director, combinación lineal, suma de vectores, producto escalar, coseno, recta, plano, proporcionalidad, ecuación vectorial, ecuación paramétrica, ecuación continua, ecuación general, ecuación explícita, ecuación punto-pendiente, parámetro, nulo, pendiente, tangente, ángulo, eje, ordenada, abscisa, cuadrante, recta horizontal, recta vertical, incidencia, secante, paralela, perpendicular, coincidente, posición relativa, sistema de ecuaciones, vértices, medianas, mediatriz, altura, baricentro, ortocentro, triángulo equilátero, cuadrilátero, punto medio, punto simétrico, punto de corte.
Gráfico
• Representación gráfica de vectores, suma de vectores (gráfica). • Representación de producto de un número por un vector. • Gráficos con identificación de coordenadas en el plano. • Gráficos que muestran posiciones relativas de dos rectas en el plano.

Lenguaje (continuación)											
Simbólico											
+,	-,	/,	$\in$,	$\mathbb{R}$,	*k,*	*t,*	*m,*	*n,*	$\neq$,	$\Rightarrow$,	$\sqrt{3}$,
$\overrightarrow{PQ} = (-3,1)$,			$\tan\alpha$,		$\vec{u} = (u_1, u_2)$,		$X(x,y)$,		$A(a_1, a_2)$,		
$\overrightarrow{AX} = t.\vec{u}$,	$(x,y) = (a_1, a_2) + t(u_1, u_2),\ t \in \mathbb{R}$,							$\begin{cases} x = a_1 + tu_1 \\ y = a_2 + tu_2 \end{cases}$		$t \in \mathbb{R}$	
$\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2}$			$Ax + By + C = 0$				$y = mx + n$		$m = \tan\alpha = \frac{u_2}{u_1}$		

Situaciones

1. Ejercicios descontextualizados de coordenadas de vectores y equipolencia, operaciones con vectores y dependencia lineal, producto escalar:
   a. Dadas las coordenadas de dos puntos, determinar vector posición, vector libre y viceversa.
   b. Calcular la distancia entre dos puntos dados.
   c. Dada una gráfica, identificar los vectores equipolentes y los libres.
   d. Dados dos vectores, calcular el producto escalar, módulo y el ángulo que forman.
2. Ejercicios descontextualizados sobre ecuaciones de la recta y posiciones relativas:
   a. Comprobar si un punto pertenece a una recta.
   b. Calcular un punto, el vector director, el vector normal de una recta partiendo de ecuaciones de la recta expresadas en diferente forma.
   c. Calcular las ecuaciones de la recta en todas las formas posibles, partiendo de:
      - Un punto y un vector director.
      - Un punto y una pendiente dada.
      - Dos puntos.
   d. Escribir de todas las formas posibles la ecuación de una recta.
   e. Estudiar la posición relativa de dos rectas y, en su caso, hallar el punto de corte, conocidas:
      - La ecuación de ambas.
      - La ecuación de una de las rectas y dos puntos por los que pasa la otra.
   f. Hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto y es paralela/perpendicular a otra que pasa por otros dos puntos dados.
3. Ejercicios contextualizados de coordenadas de vectores y equipolencia, operaciones con vectores y dependencia lineal, producto escalar, ecuaciones de la recta y posiciones relativas.
4. Preguntas reflexivas con respuestas de selección simple sobre ecuaciones de la recta y posiciones relativas.

Procedimientos/Acciones
• Descontextualizar enunciados de problemas contextualizados. • Identificar la forma de la ecuación: vectorial, paramétrica, general, etc. • Identificar un punto, el vector director y su pendiente, dada una ecuación. • Escribir la ecuación de la recta en la forma más conveniente en función de las incógnitas. • Dada una recta, identificar su pendiente para posteriormente analizar la posición relativa respecto a otra recta.

Conceptos/Definiciones
Previos:
• Conocer los números reales. • Resolver sistemas de ecuaciones lineales de forma gráfica y algebraica. • Representar coordenadas, rectas, identificar las partes de un sistema cartesiano (ejes, ordenadas, abscisas). • Reconocer y representar la función lineal a partir de una ecuación o una tabla de valores y obtener la pendiente. • Reconocer la simetría entre objetos. • Reconocer los elementos notables de un triángulo: alturas, medianas, mediatrices, ortocentro, baricentro, circuncentro, etc. • Conocer la clasificación de los triángulos y cuadriláteros.
Emergentes:
• Vectores, correspondencia vector-punto. Cálculo de distancia entre dos puntos, módulo de un vector, suma y producto de vectores. • Ecuación de la recta en varias formas: vectorial, paramétrica, continua, general, punto-pendiente, explícita. • Pasar de una ecuación dada al resto de expresiones de las ecuaciones de la recta • Aplicar conceptos geométricos previos a la resolución de problemas de las ecuaciones de la recta. • Análisis de las posiciones relativas de rectas: coincidentes, paralelas, secantes y perpendiculares.

Argumentos
• Comprobación de las propiedades. • Justificación de las propiedades. • Obtención de soluciones por un razonamiento deductivo, ver de qué información se dispone y llegar a conclusiones.

Propiedades/Proposiciones

Vectores

- Vector fijo $\overrightarrow{AB}$, es un segmento orientado con origen en A y extremo en B.
- Los elementos de un vector fijo son:
  - Módulo: distancia que separa a su origen de su extremo. Se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.
  - Dirección: dirección de la recta que pasa por su origen y por su extremo y la de todas sus paralelas.
  - Sentido: queda determinado al ir desde el origen al extremo.
- Las coordenadas $A(a_1, a_2)$ y extremo $B(b_1, b_2)$ son las del extremo menos las del origen, es decir, $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.
- El módulo de un vector calculado a partir de las coordenadas de su origen y de su extremo es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.
- El vector de posición es cualquier vector fijo que tenga como origen el origen de coordenadas. Las coordenadas de un vector de posición coinciden con las coordenadas de su extremo.
- Dos vectores fijos no nulos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Dos vectores equipolentes tienen las mismas coordenadas.
- El conjunto formado por todos los vectores equipolentes a un vector fijo dado se denomina vector libre. Se representa por $\vec{u}$.
- Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, para hallar las coordenadas del vector suma $\vec{u} + \vec{v}$, se suman las coordenadas de $\vec{u}$ y las coordenadas de $\vec{v}$, es decir, $\vec{u} + \vec{v} = u_1 + v_1, u_2 + v_2$.
- Dados un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y un escalar $k \in \mathbb{R}$, para hallar las coordenadas del vector $k\vec{u}$ se multiplican las coordenadas de $\vec{u}$ por k , es decir, $k\vec{u} = k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2)$.
- Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes si tienen la misma dirección. En este caso, sus coordenadas son proporcionales $\vec{u} = k\vec{v}$.
- El vector $\vec{w}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si se pueden encontrar dos números reales a y b, tales que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
  Se dice que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes
- Las coordenadas del punto medio *M* de un segmento *AB* son combinación lineal de las coordenadas de sus extremos. Si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$: $M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$
- El producto escalar de dos vectores libres es el resultado de multiplicar los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman, es decir:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

- El módulo de un vector es $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$.
- Si el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ es 1, entonces es un vector unitario.
- El producto escalar de los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es $\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$
- El coseno del ángulo que forman dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

- Dos vectores no nulos son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

Propiedades/Proposiciones (continuación)

Ecuaciones de la recta

- La ecuación vectorial de la recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y tiene por vector director el vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ viene dada por:
$$(x, y) = (a_1, a_2) + t(u_1, u_2) \text{ con } t \in \mathbb{R}$$
- La ecuación paramétrica de la recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y tiene por vector director el vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es:
$$\begin{matrix} x = a_1 + tu_1 \\ y = a_2 + tu_2 \end{matrix} \quad t \in \mathbb{R}$$
- La ecuación continua de la recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y tiene por vector director el vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es:
$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2}$$
- La ecuación general de una recta es de la forma $Ax + By + C = 0$.
- Dada una recta, su vector normal $\vec{n} = (A, B) = (u_2, -u_1)$ y su vector director $\vec{u} = (u_1, u_2)$ son perpendiculares por ser su producto escalar nulo.
- La ecuación explícita de una recta tiene la forma $y = mx + n$.
- La ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y tiene por pendiente m es: $y - a_2 = m(x - a_1)$.
- Las *rectas verticales* tienen pendiente infinita. No se pueden expresar con las ecuaciones habituales. Son de la forma $x = k$.

Problemas de incidencia

Sean r y s dos rectas, cuyas ecuaciones de la recta en forma general sean $r: Ax + By + C = 0$ y $s: A'x + B'y + C' = 0$ y sus pendientes y ordenadas en el origen son:

$$m = -\frac{A}{B} \qquad m' = -\frac{A'}{B'} \qquad n = -\frac{C}{B} \qquad n' = -\frac{C'}{B'}$$

- Se tiene que r y s son *secantes* si tienen un único punto en común. En este caso, sus vectores directores no son proporcionales, es decir, las rectas tienen distinta dirección y por lo tanto distinta pendiente
$$\mathrm{m} \neq m', \text{ es decir, } \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$
- Se tiene que r y s *son paralelas* cuando no tienen un único punto en común. En este caso sus vectores directores son proporcionales, es decir, las rectas tienen la misma pendiente y diferente ordenada en el origen.
$$m = m', \text{ pero } n \neq n', \text{ es decir } \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$
- Se tiene que r y s *son coincidentes* cuando tienen infinitos punto en común. En este caso sus vectores directores son proporcionales y las rectas pasan por un mismo punto, es decir, tienen la misma pendiente y la misma ordenada en el origen.
$$m = m' \text{ y } n = n', \text{ es decir, si } \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

6.2. Análisis global de la unidad didáctica

Como hemos indicado previamente, la unidad didáctica que vamos a analizar es *“Geometría analítica*”, correspondiente al tema 7 del libro de texto de 4º de ESO, el cual se adjunta en el Anexo I.

Atendiendo a su contenido, se abordan los siguientes conceptos:

- Vectores fijos y libres en el plano.
- Operaciones con vectores. Combinación lineal.
- Producto escalar de dos vectores. Aplicaciones.
- Ecuaciones de la recta.
- Problemas de incidencia.

Figura 6. Introducción Tema 7: *Geometría Analítica*.

El libro sigue el mismo diseño en todas las unidades didácticas (ver Figura 6). Cada unidad comienza con una imagen real que en este caso es una mesa de billar. En la parte inferior de la imagen se hacen una serie de preguntas relacionadas con los contenidos matemáticos a tratar.

En la segunda página continúan las imágenes con la temática que contextualiza la unidad. En este caso, usando el billar como hilo conductor, se van introduciendo terminología, símbolos y conceptos matemáticos y físicos. De esta manera, se contextualiza el temario y se trata de captar el interés de los alumnos. Esta página está organizada en tres partes (ver Figura 6):

- *Analiza y calcula.*
- *Lee y comprende.*
- *Reflexiona y saca conclusiones.*

En algunos capítulos se incluye además el apartado *¿Y tú qué opinas*?, que invita a la reflexión y fomenta el pensamiento crítico.

A continuación, se comienza a desarrollar el tema (ver Figura 7). La página comienza con el título de la sección, posteriormente, ésta se divide en dos zonas por una línea imaginaria vertical.

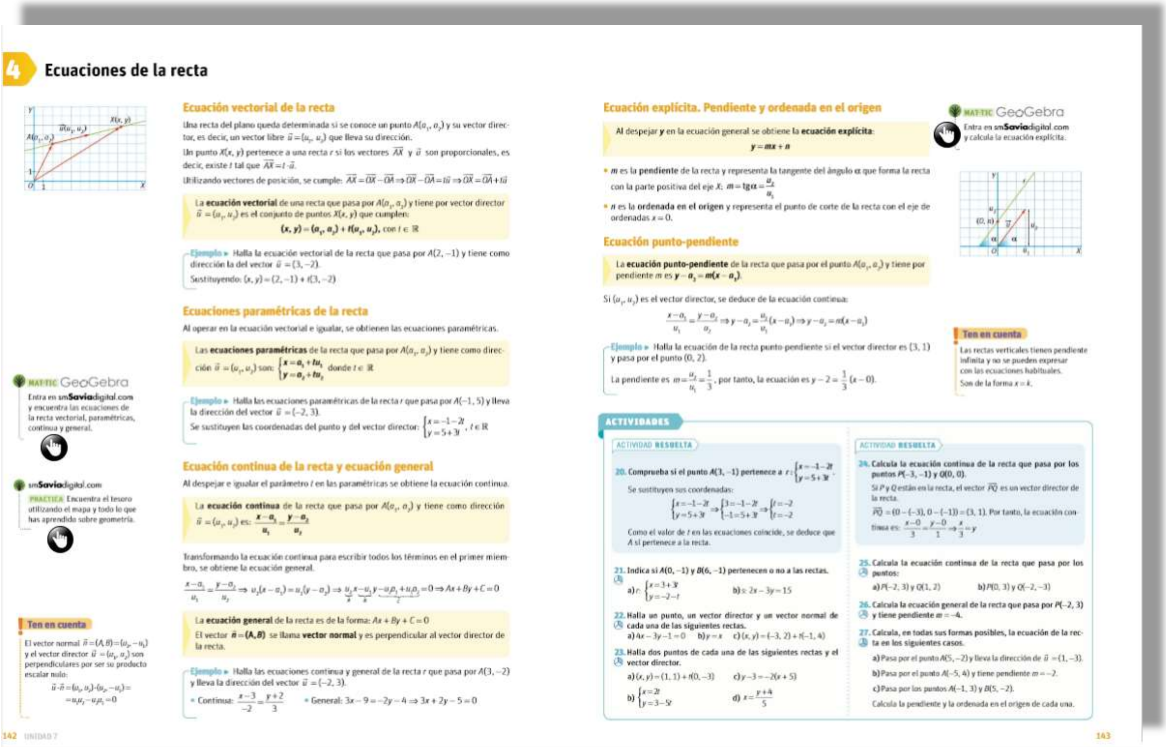
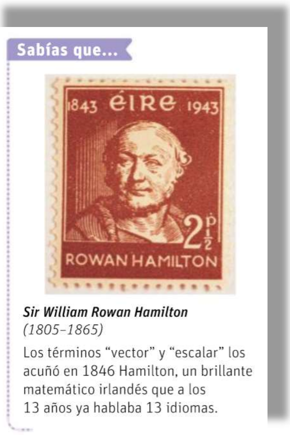


Figura 7. Introducción contenidos. Tema 7: Geometría Analítica.

En la zona exterior de la página aparecen las siguientes secciones:

<u>*Sabías que…*</u>



Sabías que: Se contextualizan los contenidos tratados en el tema. Incluye información general sobre el tema tratado y curiosidades. En otras ocasiones, se da información sobre matemáticos que han hecho aportaciones en el tema que se está trabajando.

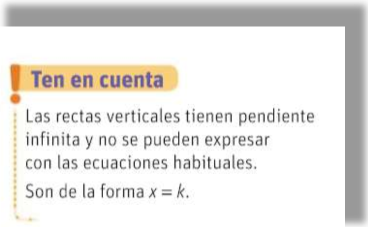
MAT-TIC GeoGebra

Enlace a la plataforma smSaviadigital, donde hay actividades interactivas (*applets* con GeoGebra) para experimentar y trabajar los conocimientos recién aprendidos.

Sm Saviadigital

Links contextualizados para actividades extra (aunque a veces no están disponibles).

Ten en cuenta



Contiene avisos, consejos o información importante para la resolución de los ejercicios.

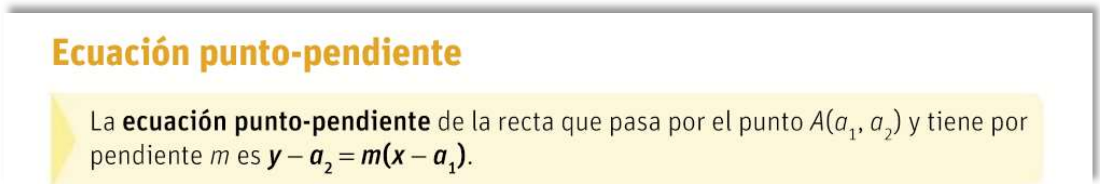
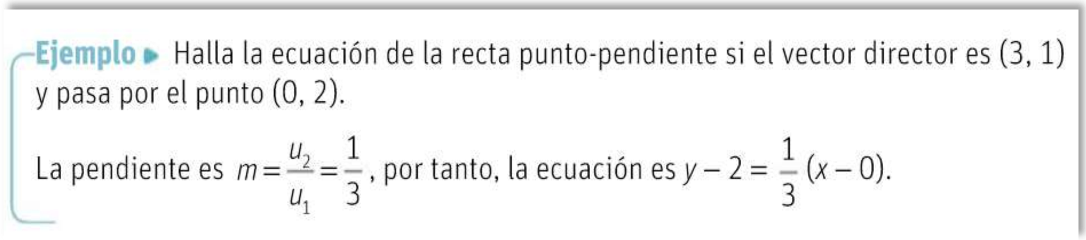


Figura 8. Ilustración de la sección *Definición de conceptos*.

Por su parte, en la zona interna de la página (ver Figura 7) se sigue el siguiente orden:

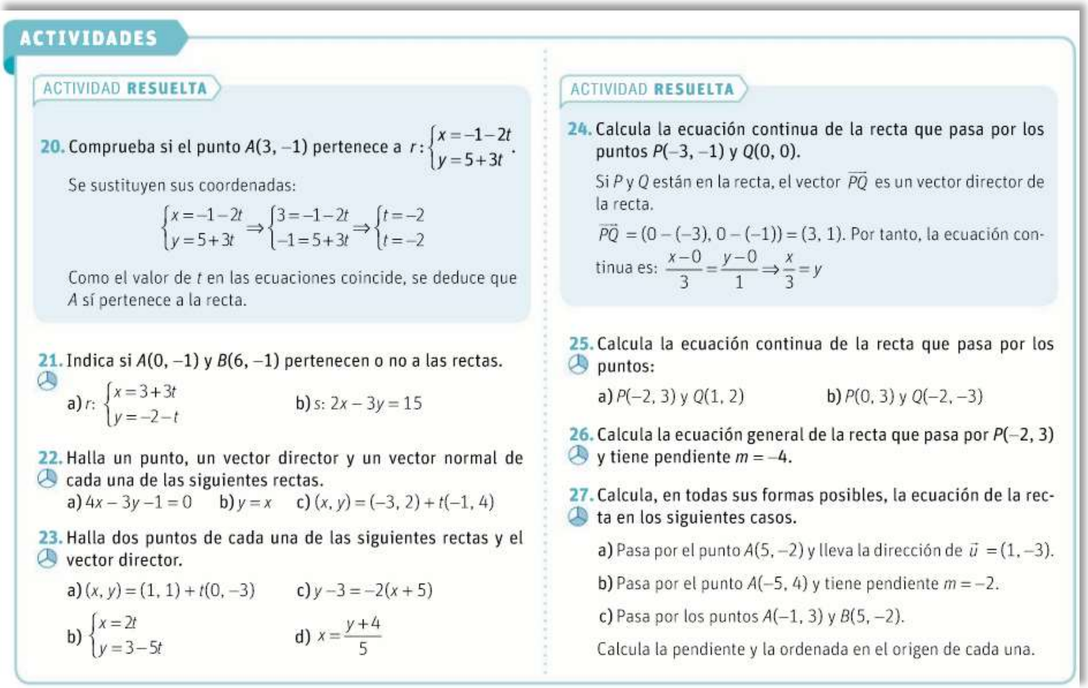
- *Título de la sección.*
- *Definición de conceptos*: en esta zona, se formalizan los contenidos. Visualmente están resaltados en un cuadro de color naranja, a fin de resaltar su importancia (ver Figura 8).
- *Ejemplo resuelto*: cuya finalidad es ayudar a comprender a través de la práctica los contenidos previamente trabajados (ver Figura 9).



Ejemplo ▸ Halla la ecuación de la recta punto-pendiente si el vector director es (3, 1) y pasa por el punto (0, 2).

La pendiente es $m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{3}$, por tanto, la ecuación es $y - 2 = \frac{1}{3}(x - 0)$.

Figura 9. Ilustración de la sección *Ejemplo resuelto*.



ACTIVIDADES

ACTIVIDAD **RESUELTA**

20. Comprueba si el punto $A(3, -1)$ pertenece a $r: \begin{cases} x = -1-2t \\ y = 5+3t \end{cases}$.

Se sustituyen sus coordenadas:

$$\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 5+3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = -1-2t \\ -1 = 5+3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$$

Como el valor de t en las ecuaciones coincide, se deduce que A sí pertenece a la recta.

21. Indica si $A(0, -1)$ y $B(6, -1)$ pertenecen o no a las rectas.

a) $r: \begin{cases} x = 3+3t \\ y = -2-t \end{cases}$ b) $s: 2x - 3y = 15$

22. Halla un punto, un vector director y un vector normal de cada una de las siguientes rectas.

a) $4x - 3y - 1 = 0$ b) $y = x$ c) $(x, y) = (-3, 2) + t(-1, 4)$

23. Halla dos puntos de cada una de las siguientes rectas y el vector director.

a) $(x, y) = (1, 1) + t(0, -3)$ c) $y - 3 = -2(x + 5)$

b) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3-5t \end{cases}$ d) $x = \frac{y+4}{5}$

ACTIVIDAD **RESUELTA**

24. Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $P(-3, -1)$ y $Q(0, 0)$.

Si P y Q están en la recta, el vector $\overrightarrow{PQ}$ es un vector director de la recta.

$\overrightarrow{PQ} = (0 - (-3), 0 - (-1)) = (3, 1)$. Por tanto, la ecuación continua es: $\frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{1} \Rightarrow \frac{x}{3} = y$

25. Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos:

a) $P(-2, 3)$ y $Q(1, 2)$ b) $P(0, 3)$ y $Q(-2, -3)$

26. Calcula la ecuación general de la recta que pasa por $P(-2, 3)$ y tiene pendiente $m = -4$.

27. Calcula, en todas sus formas posibles, la ecuación de la recta en los siguientes casos.

a) Pasa por el punto $A(5, -2)$ y lleva la dirección de $\vec{u} = (1, -3)$.

b) Pasa por el punto $A(-5, 4)$ y tiene pendiente $m = -2$.

c) Pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(5, -2)$.

Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de cada una.

Figura 10. Ilustración de la sección *Actividades*. Ejercicios propuestos al final de cada contenido.

- *Actividades*: son un grupo de ejercicios relativos al concepto tratado. Estas actividades están clasificadas según su nivel de complejidad, a través un diagrama de sectores . El área sombreada representa el nivel de dificultad. Así los ejercicios con un área sombreada corresponden al nivel más básico, mientras que los de tres áreas representan al nivel avanzado. Es una manera de adaptar los contenidos a los niveles de aprendizaje de los alumnos. En la sección de actividades hay al menos una resuelta (ver Figura 10).

Esta configuración se repite hasta que terminan con todos los contenidos de la unidad. Una vez expuestos todos los contenidos, hay un apartado llamado *Organiza tus ideas* (ver Figura 11), donde se presenta un resumen o esquema de los contenidos e ideas fundamentales trabajadas a lo largo del tema con la finalidad de facilitar el estudio.

A este resumen le sigue el apartado *Actividades clave* (ver Figura 11), donde a través de ejercicios tipo resueltos se trabajan los contenidos más importantes de la unidad.

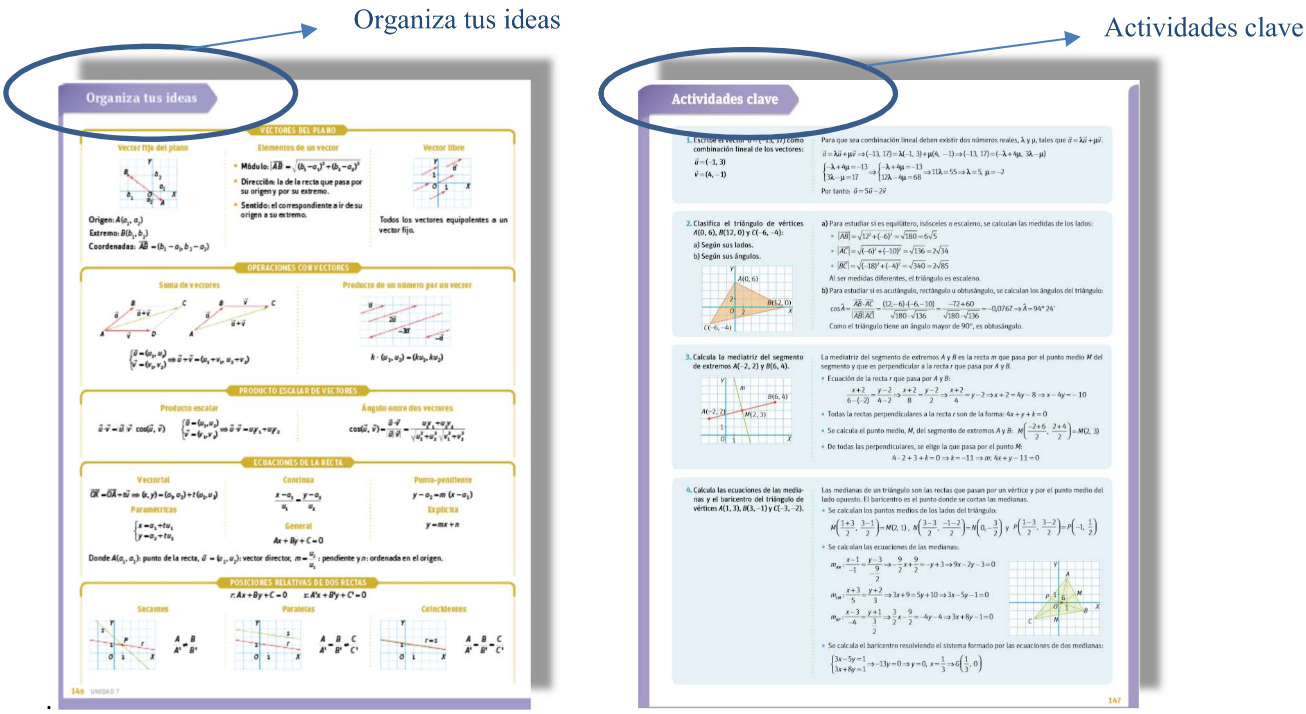


Figura 11. Ilustración de las secciones *Organiza tus ideas* y *Actividades clave.*

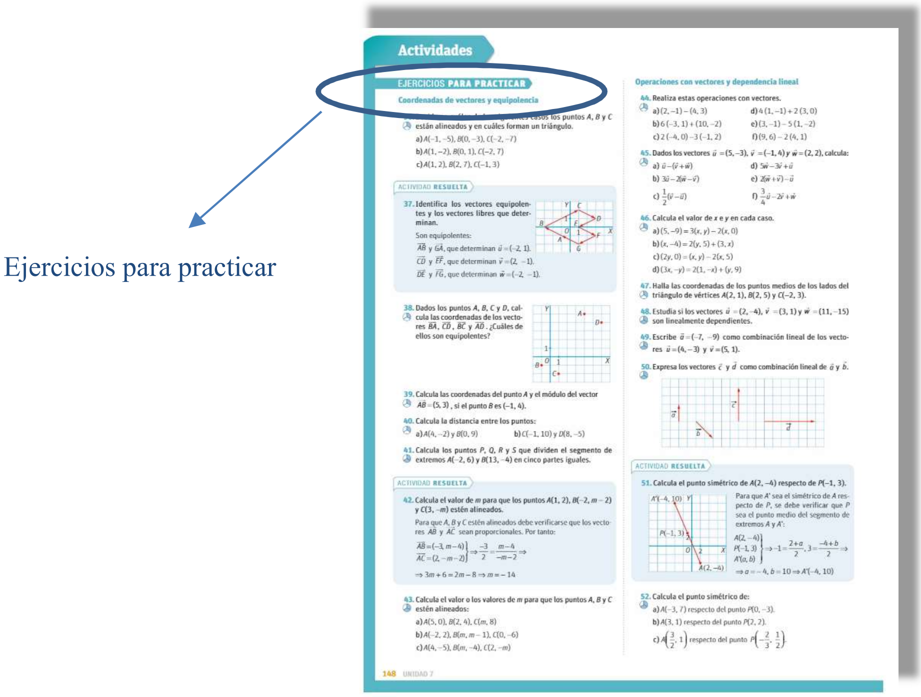


Figura 12. Ilustración de las secciones *Actividades: Ejercicios para practicar.*

Inmediatamente sigue el apartado *Actividades*, donde se presentan una serie de ejercicios y problemas organizados en:

- *Ejercicios para practicar*, son ejercicios descontextualizados muy metódicos y repetitivos. Están separados según el contenido trabajado. Hay varias actividades resueltas que sirven de guía para resolver los ejercicios propuestos (ver Figura 12).

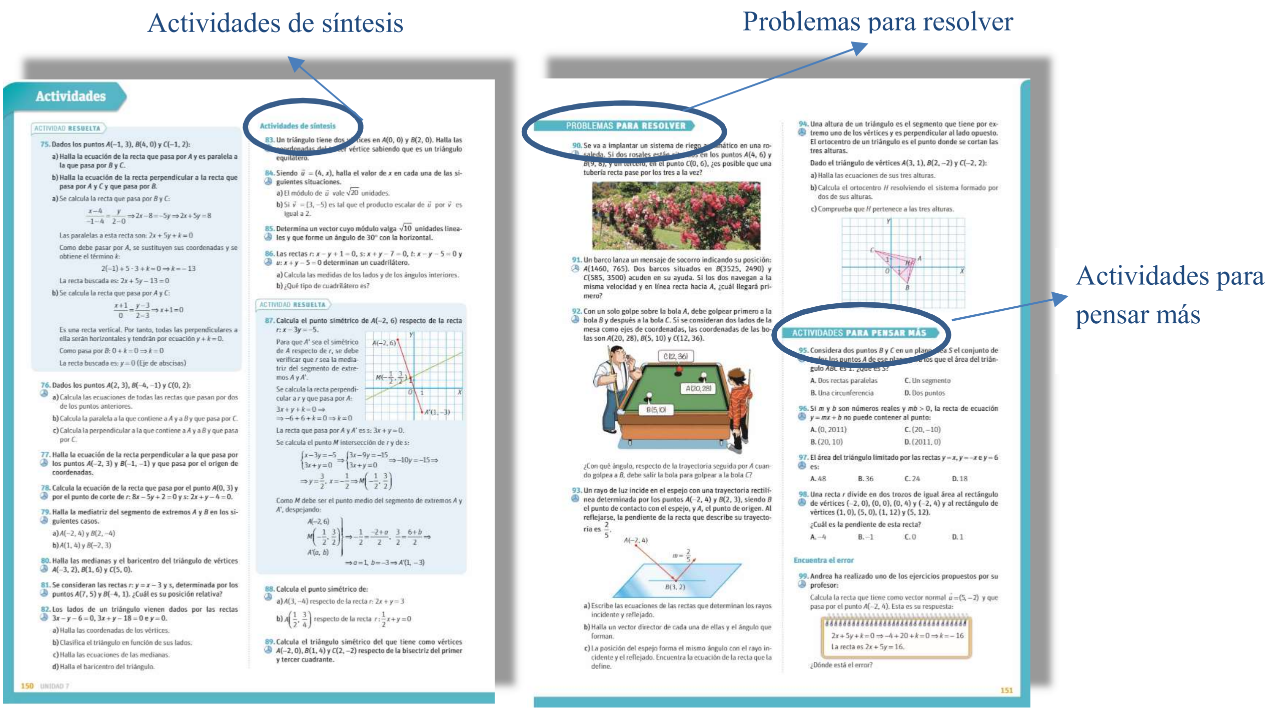


Figura 13. Ilustración de las secciones *Actividades: Actividades de síntesis, Problemas para resolver y Actividades para pensar más.*

- *Actividades de síntesis*, son ejercicios descontextualizados, pero, a diferencia de los planteados en el apartado anterior, su resolución no es tan inmediata. El alumno debe recurrir a conocimientos previos y extraer información que le ayude a la solución (ver Figura 13).
- *Problemas para resolver*, son básicamente ejercicios contextualizados, con diferentes niveles de dificultad (ver Figura 13).
- *Actividades para pensar más*, son preguntas, cuestiones y ejercicios para cuya resolución el alumno debe utilizar otras estrategias a parte de la habilidad matemática que se supone ya ha adquirido. Debe descifrar información, reflexionar y/o deducir que condiciones deben cumplirse para resolverlo (ver Figura 13).

En la Figura 14, se muestra gráficamente la proporción de cada uno de los ejercicios del apartado *Actividades* de acuerdo a la clasificación antes indicada. Puede observarse que los ejercicios de razonamiento o con un nivel de dificultad superior son minoría.

Una vez terminado el apartado *Actividades*, le sigue la sección *Ponte a prueba* (ver Figura 15), que consta de tres problemas contextualizados, uno de los cuales está resuelto y una sección final de *Autoevaluación*. Los problemas contextualizados permiten al alumno poner en valor que el concepto trabajado es aplicable a una situación real mientras que aprende a extraer información, a procesarla y a resolver una situación real con éxito.

La *Autoevaluación* la componen una serie de ejercicios para que el alumno verifique su nivel de aprendizaje. Esta sección cuyo principal objetivo es que el alumno compruebe que ha adquirido los conocimientos, no da las soluciones a los alumnos para verificar los resultados.

Figura 14. Clasificación de los ejercicios de *Actividades*. Tema 7: *Geometría analítica.*

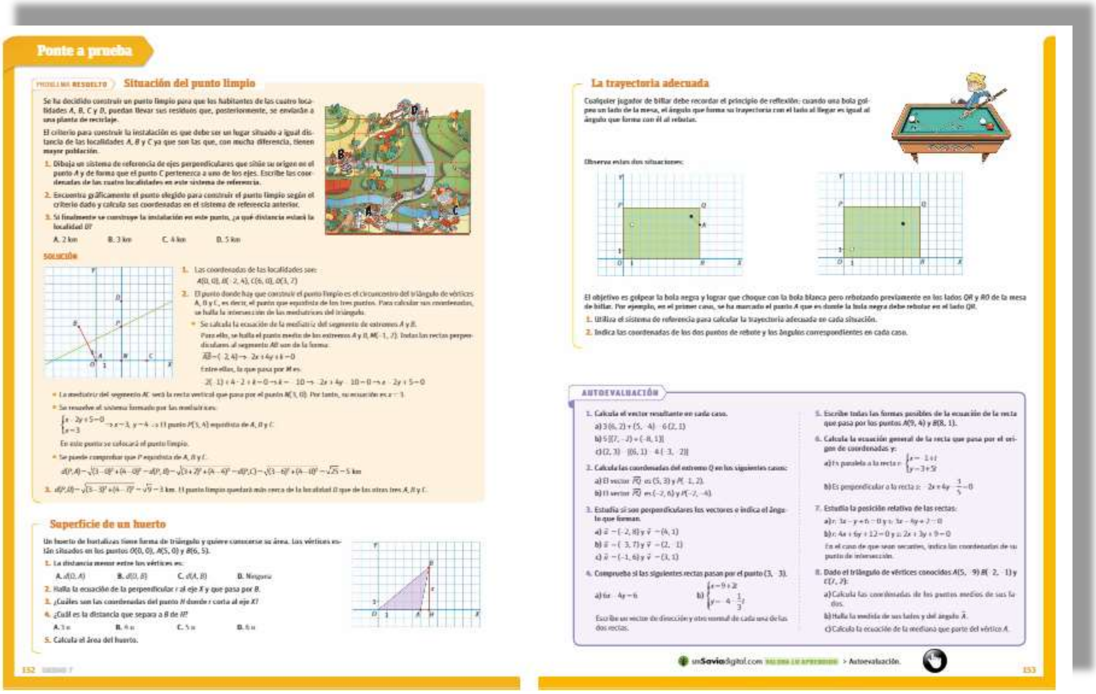
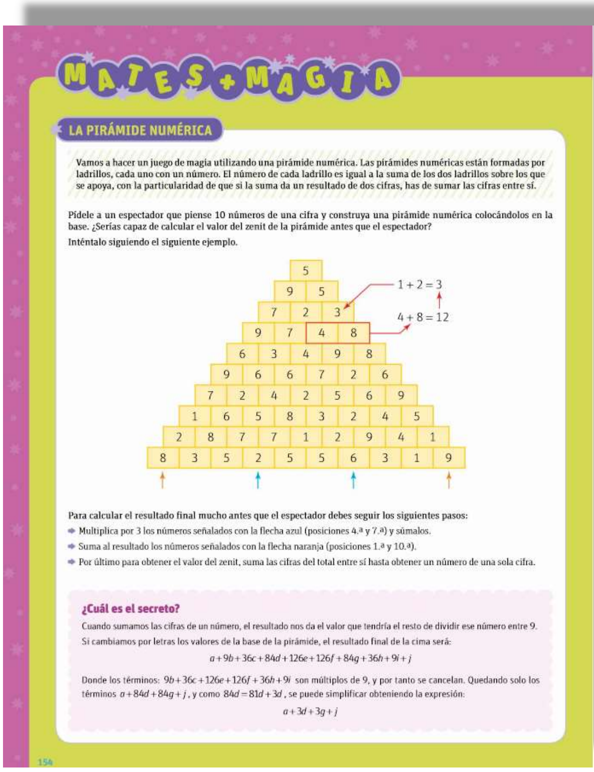


Figura 15. Ilustración de la sección *Ponte a Prueba.*

Finalmente hay una sección llamada *Mates+Magia* (ver Figura 16), con trucos de magia, juegos de cartas, etc. En el caso que nos ocupa, los trucos en cuestión no tienen relación alguna con el contenido del tema, sin embargo, es una forma de despertar el interés por las mates a través del juego y fomentar el cálculo mental.

Como material complementario al libro de texto, la editorial ofrece unos recursos interactivos (ver Figura 17) a los cuales se acede a través del libro digital, que son un complemento a la hora de estudiar.



MATES+MAGIA

LA PIRÁMIDE NUMÉRICA

Vamos a hacer un juego de magia utilizando una pirámide numérica. Las pirámides numéricas están formadas por ladrillos, cada uno con un número. El número de cada ladrillo es igual a la suma de los dos ladrillos sobre los que se apoya, con la particularidad de que si la suma da un resultado de dos cifras, has de sumar las cifras entre sí.

Pídele a un espectador que piense 10 números de una cifra y construya una pirámide numérica colocándolos en la base. ¿Serías capaz de calcular el valor del zenit de la pirámide antes que el espectador?

Inténtalo siguiendo el siguiente ejemplo.

5
9 5
7 2 3
9 7 4 8
6 3 4 9 8
9 6 6 7 2 6
7 2 4 2 5 6 9
1 6 5 8 3 2 4 5
2 8 7 7 1 2 9 4 1
8 3 5 2 5 5 6 3 1 9

$1 + 2 = 3$

$4 + 8 = 12$

Para calcular el resultado final mucho antes que el espectador debes seguir los siguientes pasos:

- Multiplica por 3 los números señalados con la flecha azul (posiciones 4.ª y 7.ª) y súmalos.
- Suma al resultado los números señalados con la flecha naranja (posiciones 1.ª y 10.ª).
- Por último para obtener el valor del zenit, suma las cifras del total entre sí hasta obtener un número de una sola cifra.

¿Cuál es el secreto?

Cuando sumamos las cifras de un número, el resultado nos da el valor que tendría el resto de dividir ese número entre 9.

Si cambiamos por letras los valores de la base de la pirámide, el resultado final de la cima será:

$$a + 9b + 36c + 84d + 126e + 126f + 84g + 36h + 9i + j$$

Donde los términos: $9b + 36c + 126e + 126f + 36h + 9i$ son múltiplos de 9, y por tanto se cancelan. Quedando solo los términos $a + 84d + 84g + j$, y como $84d = 81d + 3d$, se puede simplificar obteniendo la expresión:

$$a + 3d + 3g + j$$

154

Figura 16. Ilustración del apartado *Mates+Magia*.

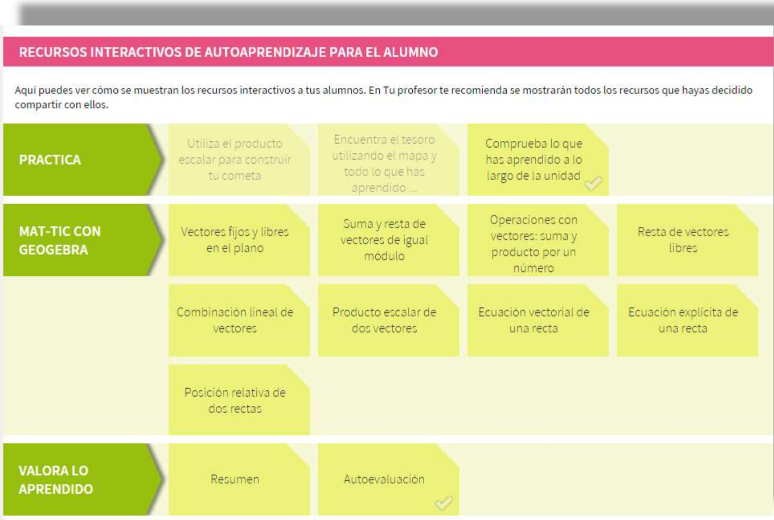


Figura 17. Ilustración de la plataforma de aprendizaje de la editorial SM.

Capítulo 7

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica

El objetivo de este capítulo es tratar de identificar las dificultades y errores previsibles durante el desarrollo del aprendizaje de las ecuaciones de la recta en 4º de ESO. Como consecuencia se tratará de establecer estrategias durante la enseñanza que se traduzcan en la mejora del proceso de aprendizaje del alumno.

7.1. Dificultades

En el proceso de aprendizaje se prevé que los alumnos presenten dificultades en:

- Manejar expresiones algebraicas como las ecuaciones de la recta y los sistemas de ecuaciones, ya que les cuesta trabajar con expresiones alfanuméricas. También presentan dificultades cuando operan con este tipo de expresiones precedidas de signo negativo, cuando deben aplicar la jerarquía de operaciones, cuando deben despejar una incógnita o reemplazar valores.

- Entender los significados asociados al concepto de vector, es decir, comprender que un vector da información de la magnitud, dirección y sentido. Asimismo, se esperan dificultades en las operaciones con vectores, particularmente en el cálculo de las coordenadas de un vector dados dos puntos.

- Recordar y manejar con habilidad las diferentes expresiones de las ecuaciones de la recta. Y entender que, aunque se expresen de diferentes formas, siempre se trata de la misma recta. Dentro de las ecuaciones, una de las que puede generar más dificultades es la paramétrica, a algunos estudiantes les cuesta comprender el significado del parámetro t.

- Recordar los métodos para resolver sistemas de ecuaciones: gráfico, de sustitución, de igualación y de reducción.

- Recordar la forma de las expresiones algebraicas de las funciones lineales y afines. Particularmente suelen tener dificultades en calcular un punto, es decir, calcular y en función de x y viceversa y en comprobar si un punto pertenece a una recta.

7.2. Errores y su posible origen

Muchos de los errores que se describen tiene su origen en la falta de atención de los alumnos durante la realización de los ejercicios, lo cual puede corregirse trabajando un método de resolución y comprobación. Otros, son consecuencia de fallos que arrastran de cursos anteriores, porque en su momento no se consolidaron los contenidos o porque al no ser de uso diario están olvidados.

Se pronostica que los alumnos cometerán errores al:

- Calcular la magnitud de un vector, porque es un concepto que está recién trabajado y los alumnos no tienen los conocimientos consolidados.

- Representar gráficamente un punto o trabajar con las ecuaciones algebraicas (sustituyendo valores) porque intercambiar el orden de las coordenadas de un punto.

- No identificar correctamente los elementos del plano cartesiano: abscisas, ordenadas, origen, etc.

- Resolver sistemas de ecuaciones.

- Operar con expresiones algebraicas por un manejo insuficiente del algebra. Estos errores serán consecuencia de no prestar la suficiente atención a los signos, paréntesis, es decir, a no tener consolidados los procedimientos de la jerarquía de operaciones.

- Traducir ejercicios que estén en un lenguaje ordinario al algebraico o viceversa a causa de una deficiente compresión lectora.

- Operar con expresiones donde: deban sustituir valores en la ecuación, trabajen con fracciones o deban simplificar.

- Operar con expresiones, no porque no sepan realizar estas operaciones sino por la falta destrezas no conseguidas y que arrastran desde los cursos anteriores.

Capítulo 8

El proceso de estudio

En este capítulo se detalla la configuración y diseño de las sesiones de clase para impartir la unidad didáctica de Geometría Analítica en 4º de ESO. Es importante señalar que el contenido de la unidad es:

- Vectores fijos y libres en el plano.
- Operaciones con vectores. Combinación lineal.
- Producto escalar de dos vectores. Aplicaciones.
- Ecuaciones de la recta.
- Problemas de incidencia.

Sin embargo, los contenidos referidos a vectores ya habían sido impartidos y evaluados por el profesor antes de iniciar el periodo de prácticas. En consecuencia, los contenidos trabajados en este análisis son las ecuaciones de la recta y problemas de incidencia. Es decisión del Departamento de Matemáticas del centro que en 4º de ESO no se estudien rectas perpendiculares ni el vector normal, siendo ambos contenidos se impartidos en 1º de Bachillerato.

Todas las sesiones se realizaron en el aula de clase, para ello se utilizó la pizarra, el proyector y el programa informático GeoGebra.

Para impartir la unidad, se diseñó una presentación (Anexo II) que se utilizó de forma combinada, junto con las aplicaciones de GeoGebra (Anexo III) y la pizarra tradicional.

Los contenidos de ecuaciones de la recta se impartieron en ocho sesiones y se destinó una sesión adicional para la realización del examen de contenidos. Esta planificación seguía las directrices que el profesor del curso estableció en su planificación general de la asignatura. La duración de las sesiones fue de 55 minutos.

A continuación, se describe al detalle la distribución del tiempo de clase, las actividades realizadas en el aula y aquéllas propuestas como trabajo autónomo para los alumnos fuera del horario escolar.

8.1. Distribución del tiempo de la clase

A continuación, en forma de tabla se presenta la información de las actividades realizadas en cada sesión, su duración, el responsable, así como el tipo de docencia.

Sesión 1

Tipo	*Tiempo (min)*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Actividades de introducción del tema	5	Profesor	Magistral
Exposición teórica: ecuaciones vectorial, paramétrica y continua	30	Profesor	Magistral
Ejercicios realizados por profesor	20	Profesor	Magistral

Sesión 2

Tipo	*Tiempo (min)*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Resumen de la sesión anterior.	10	Profesor	Magistral
Exposición teórica: ecuaciones: general, punto-pendiente y explícita	25	Profesor	Magistral
Ejercicios realizados por profesor y tarea	20	Profesor	Magistral

Sesión 3

Tipo	*Tiempo (min)*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Resumen de las sesiones anteriores y comentario de la tarea asignada	10	Profesor	Magistral
Exposición teórica: problemas de incidencia	20	Profesor	Magistral
Ejercicios realizados por profesor	25	Profesor	Magistral

Sesión 4

Tipo	*Tiempo (min)*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Repaso de toda la unidad	10	Profesor	Magistral
Resolución dudas, tareas	20	Profesor	Dialógica
Ejercicios por parejas	25	Compartida	Constructivista

Sesión 5

Tipo	*Tiempo (min)*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Ejercicios en clase, trabajo en grupos. Apoyo individual	55	Compartida	Constructivista

Sesión 6

Tipo	*Tiempo (min)*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Ejercicios en clase, trabajo en grupos. Apoyo individual	55	Compartida	Constructivista

Sesión 7

Tipo	*Tiempo (min)*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Ejercicios en clase, trabajo en grupos. Apoyo individual	55	Compartida	Constructivista

Sesión 8

Tipo	*Tiempo (min)*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Ejercicios en clase, trabajo en grupos. Apoyo individual	35	Compartida	Constructivista
Ejercicios en *Socrative*	20	Compartida	Constructivista

Sesión 9

Tipo	*Tiempo (min)*	*Responsable*	*Tipo de docencia*
Examen	55	Alumno	-

8.2.Actividades adicionales planificadas

Para el desarrollo de las clases, se incluyeron *applets* en GeoGebra que sirven para visualizar el comportamiento de la recta al variar algunos elementos. La dinámica que ofrece el software les permite ver rápidamente qué elementos se han variado y cómo influyen en la construcción de las ecuaciones de la recta y en su posición relativa. Estos applets fueron utilizados durante la explicación teórica de los conceptos (ver Anexo III).

Como tarea (fuera del aula), se les pidió resolver con GeoGebra algunos ejercicios (ver Figura 18) puestos a su disposición mediante la plataforma Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA). La calificación de estos ejercicios supone el 5 % de la calificación final de la asignatura.

En las últimas sesiones de la unidad didáctica, se trabajó una serie de ejercicios que los alumnos debían realizar en grupo de forma colaborativa. Los grupos estaban establecidos previamente por el profesor, y estaban constituidos por estudiantes con diferentes ritmos de aprendizaje. Se pretendía que entre todos se ayudaran a consolidar el aprendizaje y desarrollasen habilidades interpersonales. La calificación de esta actividad representaba el 5 % de la calificación final de la asignatura.

El cierre de la unidad didáctica fue contestar en grupo un cuestionario propuesto en *Socrative* (ver Figura 19), con la finalidad de cambiar el ritmo de la clase y subir la motivación de los alumnos.

Sesión	*Tipo*	*Tiempo estimado (min)*	*Relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje*
2	Ejercicios individuales. Ejercicio 20, 22, 23 y 26 (fuera del aula).		Consolidación
4	Ejercicios por parejas. Ejercicio 29, 30, 31 y 33 (aula).	20	Consolidación
-	Ejercicios GeoGebra, Fuera del Aula.	25	Refuerzo
5,6,7 y 8	Continuación ejercicios sesión 4 y ejercicios en grupo: Del 63 al 78, excepto el 77 (aula).	200	Consolidación
8	Ejercicios Grupo – *Socrative* (aula).	20	Refuerzo

Tabla 32. Tarea prevista del alumno.

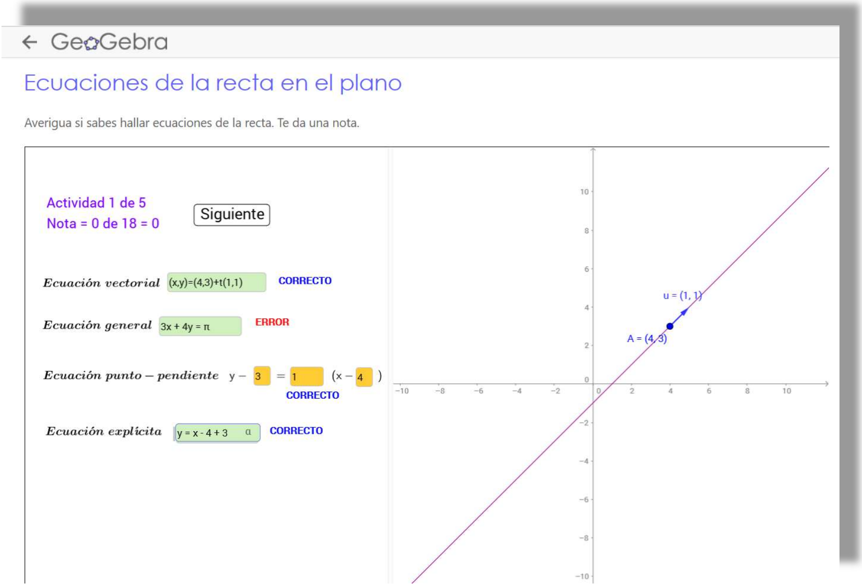


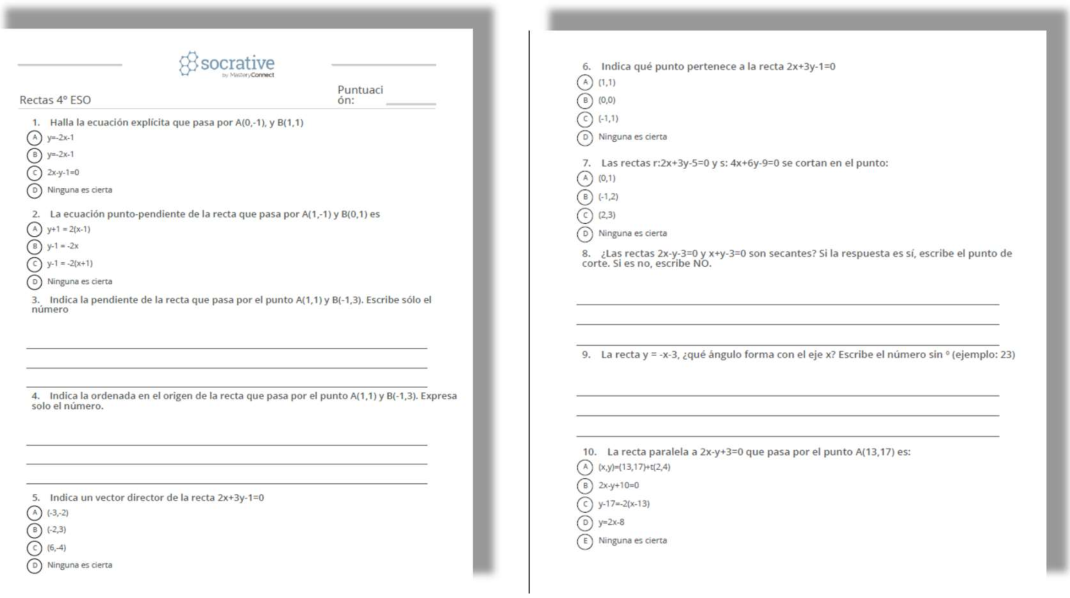
Figura 18. Ilustración ejercicio de tarea en *GeoGebra.*

8.3. La tarea: actividad autónoma del alumno prevista

La tarea es una forma de consolidar el aprendizaje, fomentar el trabajo diario y establecer una rutina de estudio. En la Tabla 32, puede observarse las tareas asignadas a los alumnos, la primera de ellas (sesión 2), consistía en la realización de cinco ejercicios relacionado con las ecuaciones de la recta, uno de ellos fue resuelto en clase, esta actividad debía realizarse fuera del aula. La segunda actividad, temporalizada en la sesión 3, se realizó en clase, consistió en realizar cinco ejercicios de posiciones relativas de las rectas en parejas. En ambos casos, fueron actividades para ejercitar.

Durante el desarrollo de la unidad, los estudiantes debieron realizar en casa una tarea en forma individual. Para ello debían resolver un cuestionario de ejercicios en GeoGebra (ver Figura 18). El cuestionario está diseñado, para que pueda resolverse múltiples veces y los ejercicios que propone son aleatorios, de manera que cada estudiante realiza un ejercicio diferente al de sus compañeros. Se corrigen en línea y al terminar el cuestionario, se indica al alumno la calificación y el tiempo empleado. Esta actividad permite, aparte de trabajar los contenidos de la unidad, familiarizarse con el software que será utilizado en los próximos cursos en las asignaturas de Matemáticas y Física.

Como actividad complementaria y resultado de su trabajo autónomo en clase (trabajo colaborativo durante las sesiones 5, 6, 7 y 8 deberán presentar los ejercicios resueltos en grupo. Estos computan un 5 % en la nota final. Para garantizar la exigibilidad individual, sólo se recoge el trabajo de uno de los miembros del grupo, que es elegido por sorteo antes de la entrega de los mismos.



socrative by MasteryConnect

Rectas 4º ESO — Puntuación:

1. Halla la ecuación explícita que pasa por A(0,-1), y B(1,1)
   - A) y=-2x-1
   - B) y=-2x-1
   - C) 2x-y-1=0
   - D) Ninguna es cierta
2. La ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por A(1,-1) y B(0,1) es
   - A) y+1 = 2(x-1)
   - B) y-1 = -2x
   - C) y-1 = -2(x+1)
   - D) Ninguna es cierta
3. Indica la pendiente de la recta que pasa por el punto A(1,1) y B(-1,3). Escribe sólo el número
4. Indica la ordenada en el origen de la recta que pasa por el punto A(1,1) y B(-1,3). Expresa solo el número.
5. Indica un vector director de la recta 2x+3y-1=0
   - A) (-3,-2)
   - B) (-2,3)
   - C) (6,-4)
   - D) Ninguna es cierta
6. Indica qué punto pertenece a la recta 2x+3y-1=0
   - A) (1,1)
   - B) (0,0)
   - C) (-1,1)
   - D) Ninguna es cierta
7. Las rectas r:2x+3y-5=0 y s: 4x+6y-9=0 se cortan en el punto:
   - A) (0,1)
   - B) (-1,2)
   - C) (2,3)
   - D) Ninguna es cierta
8. ¿Las rectas 2x-y-3=0 y x+y-3=0 son secantes? Si la respuesta es sí, escribe el punto de corte. Si es no, escribe NO.
9. La recta y = -x-3, ¿qué ángulo forma con el eje x? Escribe el número sin º (ejemplo: 23)
10. La recta paralela a 2x-y+3=0 que pasa por el punto A(13,17) es:
    - A) (x,y)=(13,17)+t(2,4)
    - B) 2x-y+10=0
    - C) y-17=-2(x-13)
    - D) y=2x-8
    - E) Ninguna es cierta

Figura 19. Ilustración cuestionario en *Socrative.*

Capítulo 9

Experimentación

En este capítulo se analizarán los resultados de la experimentación realizada en el aula. Esta fase incluye el diseño, la descripción de la muestra, las características del cuestionario, la descripción de los comportamientos esperados, la exposición de resultados obtenidos y el análisis de los mismos. El último objetivo es identificar los errores y diseñar estrategias para minimizarlos, cuando se imparta de nuevo esta unidad didáctica.

9.1. Muestra y diseño de la experimentación

La muestra es una de las dos clases de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas en 4º de ESO de un colegio concertado de Pamplona. La oferta educativa del centro va desde Educación Infantil hasta Bachillerato, lo que hace que los alumnos se conozcan de cursos anteriores.

La clase objeto de este estudio consta de 27 alumnos, 17 chicas y 10 chicos, todos ellos de edades comprendidas entre los 15 y los 16 años, cognitivamente tienen la capacidad de realizar operaciones formales y utilizar ideas abstractas. El alumnado es de clase media, mayoritariamente de origen español. El grupo de alumnos es participativo, se involucra rápidamente en las actividades programadas y mantiene una conducta de respeto entre compañeros y con el profesor.

La prueba fue diseñada entre los profesores de los dos grupos de 4º de ESO y se realizó simultáneamente. No obstante, para la realización de este análisis, sólo se tendrán en cuenta los resultados de la clase de referencia. Ésta además de ser el medio para calificar cuantitativamente parte de la unidad didáctica de Geometría Analítica, a los efectos de este análisis permitirá observar las resoluciones de problemas de ecuaciones de la recta.

9.2. El cuestionario

En la última sesión se realizó un examen que constaba de dos partes. La primera de ellas, con una calificación máxima de 2,5 puntos, consistía en responder justificadamente si varios enunciados eran verdaderos. Había cinco cuestiones, cuatro de ellas relativas a ecuaciones de la recta y la última sobre la posición relativa de dos rectas (ver Figura 20).

La segunda parte del cuestionario (ver Figura 21) eran ejercicios descontextualizados en los que se pedía:

- Expresar la ecuación dada en otra forma solicitada.
- Determinar la posición relativa y en su caso el punto de corte, de dos rectas dadas.
- Hallar la ecuación de una recta paralela a otra dada y que pase por un punto determinado.
- Obtener un punto, el vector director y la pendiente a partir de una ecuación dada.

En resumen, actividades muy similares a los ejercicios del libro de texto y los ejercicios trabajados en clase. Este parte tiene una calificación máxima de 4 puntos.

CONTROL LA RECTA **4º ESO MATEMATICAS ACADEMICAS** **CURSO 2016-2017**

ALUMNO/A **FECHA:31-03-17**

Contesta razonadamente si son verdaderas o falsas las afirmaciones (0,5 puntos cada una)

a) La recta $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{2}$ forma 60º con el semieje positivo del eje x

b) El punto A(15,1) pertenece a la recta de ecuación $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{2}$

c) El vector que une P(1,3) y Q(-2,6) es vector director de la recta $y=-x+1$

d) La pendiente de la recta que pasa por los puntos A(-1,-1) y B(3,3) es m=-1

e) La recta dada por (x,y)=(1,1)+t(-2,3) y la recta dada por $2x+3y-1=0$ son coincidentes.

Figura 20. Cuestionario Ecuaciones de la recta - primera parte.

Responde a estos ejercicios en hoja aparte en el orden que quieras

1. Dadas las rectas $r: 2x+3y-12=0$ y $s: \frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{1}$, se pide:
   a. Expresa la recta *r* mediante una ecuación en forma paramétrica y continua. (0,5 puntos)
   b. Expresa la recta *s* mediante una ecuación en forma vectorial y punto-pendiente. (0,5 puntos)

2. Sean las rectas "*r*" y "*s*" determina su posición relativa

   $r: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \end{cases}$ y $s: x-3y+1=0$ (0,5 puntos)

   Si son secantes calcula su punto de corte. (0,75 puntos)

3. Dada la recta $r: \begin{cases} x=3-5t \\ y=-2+2t \end{cases}$ Hallar la ecuación de la recta en forma continua paralela a *r* que pasa por el punto P(1,3). (1 punto)

4. Dada la recta $3x-2y+5=0$. Calcula un punto, vector director y pendiente de dicha recta. (0,75 puntos)

Figura 21. Cuestionario Ecuaciones de la recta - segunda parte.

9.3. Cuestiones y comportamientos esperados

A continuación, se presenta el análisis de cada pregunta del cuestionario y los comportamientos esperados de los alumnos a la hora de resolverlos, siendo consiente que es factible que algunos alumnos incurran en los errores previstos y presenten las dificultades detectadas en el capítulo 7 de este trabajo.

Primera Parte – Razonamiento (ver Figura 20)

Ejercicio a

Se espera que transformen la ecuación a la forma explícita y/o punto-pendiente para identificar la pendiente, calcular el ángulo y finalmente comparar, en lugar de detectar que la ecuación continua les proporciona el vector director y, a partir de él, puedan calcular la pendiente. También se espera que algunos alumnos puedan calcular la pendiente a través de la ecuación, pero no sepan cómo comparar el resultado obtenido con el dato proporcionado en grados.

Ejercicio b

Se espera que lo resuelvan sin problemas. Algunos alumnos primero transformarán la recta a su forma explícita, para posteriormente calcular el valor de y partiendo de x.

Ejercicio c

Esta pregunta podría generarles confusión. No les resultará complicado calcular el vector director a partir de los puntos, pero sí la comparación ya que uno está en forma de vector y el otro en forma de pendiente. Además, no son iguales, sino proporcionales. Se espera que intenten demostrar que los puntos dados pertenecen a la recta dada y eso les confundirá.

Ejercicio d

Según lo observado en el trabajo en el aula, no se esperan dificultades. El cálculo del vector director y de la pendiente a través de éste se ha trabajado en los ejercicios resueltos en clase. Además, como deben comparar numéricamente una pendiente con otra, sin necesidad de hacer otros razonamientos, no supondrá mayores problemas.

Ejercicio e

En esta pregunta no se esperan dificultades. No tendrán problemas en identificar las pendientes y dominar los conceptos teóricos de las posiciones de las rectas. Deberían ser capaces de resolver esta pregunta sin apenas cálculos, sólo con identificar las pendientes se deduce que son secantes.

En líneas generales estas cinco preguntas pueden contestarse rápidamente y sin necesidad de realizar largas operaciones matemáticas. Se espera que la gran mayoría sea capaz de resolverlas adecuadamente, aunque con resoluciones más largas o realizando pasos innecesarios.

Segunda Parte – Ejercicios (ver Figura 21)

Ejercicio 1

Este ejercicio tiene dos apartados completamente independientes. En el primero de ellos, dada una recta expresada en forma general se debe hallar su ecuación en forma paramétrica y en forma continua. De forma similar, en el segundo apartado se propone hallar las ecuaciones en forma vectorial y punto-pendiente de una recta expresada en forma continua.

Se espera que ambos sean resueltos sin mayor dificultad. Aunque son ejercicios que pueden resolverse a través de varios planteamientos, la expectativa es que el procedimiento de resolución siga el desarrollo descrito a continuación:

- Parte a: identificar que los coeficientes en la ecuación de general son los términos del vector director, posteriormente, dar un valor a x para hallar y, consiguiendo así las coordenadas de un punto de la recta. Finalmente, con el vector director y el punto calculado pueden construir la ecuación paramétrica y la ecuación continua de la recta.
- Parte b: identificar que los denominadores de la ecuación continua proporcionan el vector director y los términos que acompañan a x e y en el numerador son las coordenadas del punto. Posteriormente, expresar la ecuación en forma vectorial. La ecuación en forma punto-pendiente se puede obtener reorganizando los términos de la ecuación en forma continua.

Algunos alumnos identificarán o calcularán mentalmente los vectores y/o los puntos y no argumentarán en su hoja de respuesta cómo llegaron a ello. Esta situación se detectó en clase y se transmitió al alumnado que las respuestas deben estar justificadas.

Ejercicio 2

Este ejercicio, tiene dos apartados dependientes y se espera que sean resueltos sin problemas. No obstante, si no realizan el primero correctamente, el segundo no deberían culminarlo con éxito. El procedimiento de resolución esperado es:

- Parte a: lo más eficiente es identificar el vector director en la ecuación paramétrica y, a partir de él, calcular la pendiente. Sin embargo, de acuerdo a lo observado en las prácticas, los alumnos no se sienten cómodos con esa forma y recurren generalmente a la forma explícita, aunque llegar a ella les suponga más esfuerzo. Una vez hecho esto, identificarán la pendiente y la compararán utilizando los criterios de incidencia.
- Parte b: se espera que igualen las ecuaciones, obtengan un valor para una de las coordenadas del punto y, posteriormente, hallen el otro miembro del par de coordenadas. Si se presentan problemas serán debidos a no obtener correctamente la ecuación de la recta a partir de la ecuación paramétrica y a errores de cálculo al operar.

Ejercicio 3

Se prevé que suceda lo mismo que en la parte a de la pregunta 2. Tratarán de expresar la ecuación paramétrica de otra forma, en lugar de identificar en ella los datos disponibles. En este caso, se espera que traten de llegar a la ecuación en forma general, al igual que se hacía en un ejemplo del libro de texto trabajado en clase.

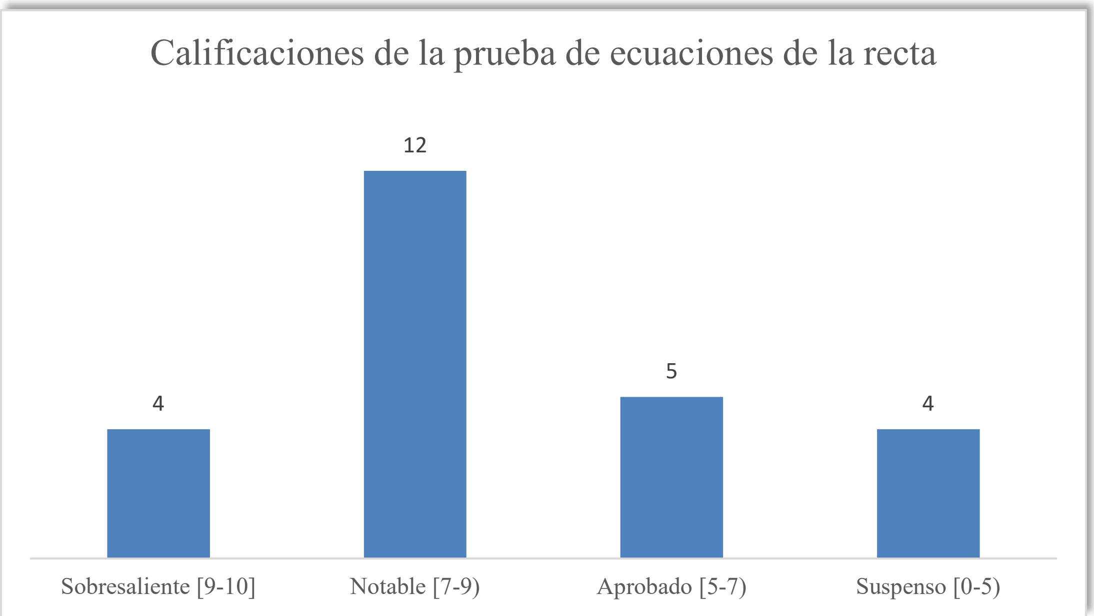


Figura 22. Distribución de las calificaciones en la prueba de ecuaciones de la recta

.

Ejercicio 4

Se espera que pasen a la forma explícita de la ecuación, construyan una tabla de valores, calculen dos puntos, a continuación, calculen el vector director y, finalmente, la pendiente.

Será el ejercicio que menos dificultad presente para ellos. Si se producen errores serán provocados por erratas en las operaciones, pero no por asimilación conceptos.

En resumen, el comportamiento esperado es:

- Utilizar varias vías para resolver los ejercicios.
- Los ejercicios se podrán resolver más rápido y de forma más eficiente, si tienen los conceptos claros.
- En el momento que pasen de una forma de expresar una ecuación a otra, habrá más posibilidades de cometer errores, no porque aumente el grado de dificultad, sino por el hecho de introducir un paso adicional.
- Habrá quienes no lleguen a la solución correcta porque cometan errores al operar, con independencia de que manejen bien los conceptos.
- Otros alumnos no obtendrán la máxima calificación porque no justificarán sus respuestas, porque efectuarán los cálculos mentalmente sin dejar evidencia de sus razonamientos por escrito.

9.4. Resultados

La muestra inicial de 27 alumnos, se modificó ya que 2 alumnos no asistieron a la prueba y realizaron otro cuestionario en días posteriores. Por lo tanto, se excluyen de la muestra y ésta se fija en 25 alumnos.

La situación extraordinaria de cambiar la fecha de la convocatoria de exámenes de recuperación de septiembre a junio ha obligado a que las recuperaciones de las evaluaciones de este curso se modificasen y pasasen de junio a realizarse durante el curso

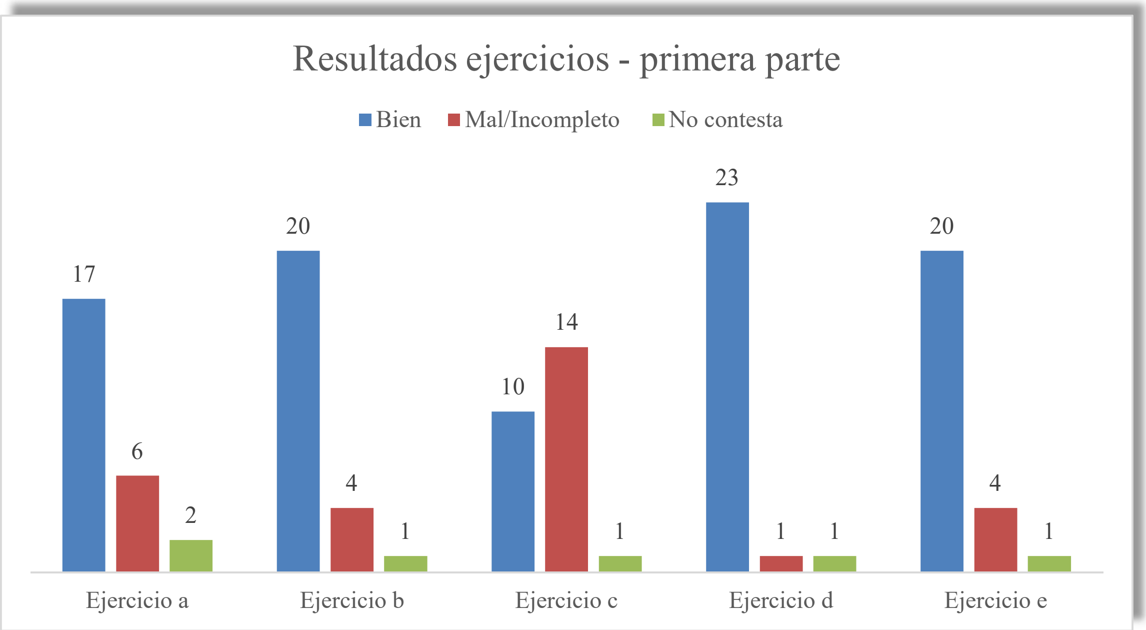


Figura 23. Resultados ejercicios de la primera parte.

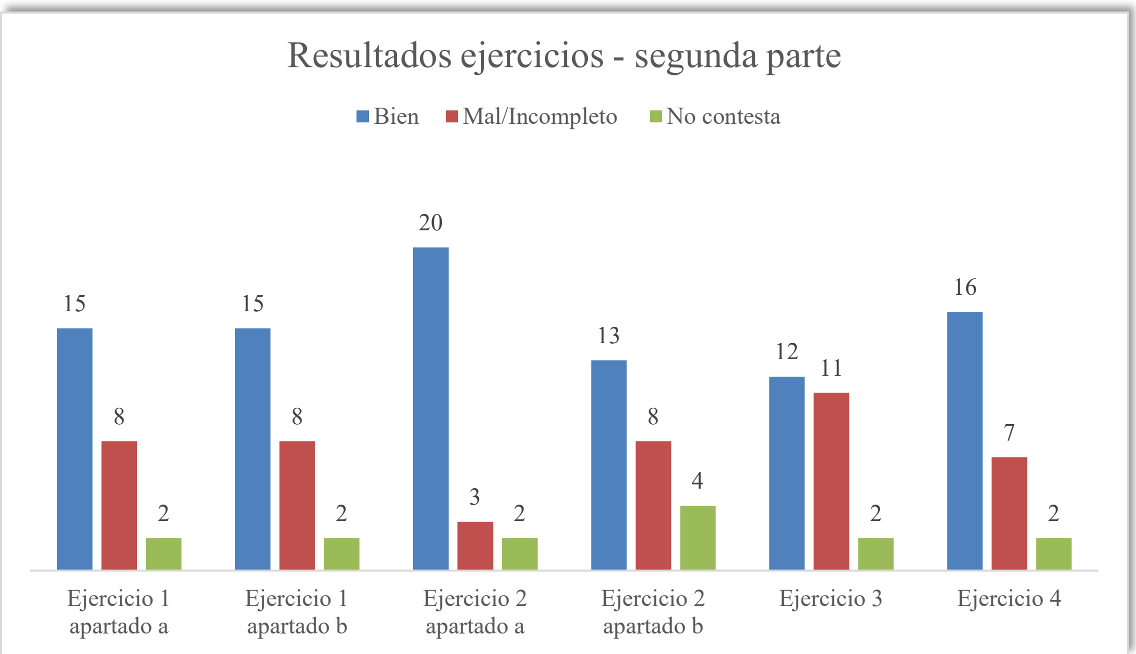


Figura 24. Resultados ejercicios de la segunda parte.

escolar. Se dio la circunstancia de que en la misma semana algunos alumnos tenían esta prueba y la recuperación de la segunda evaluación de Matemáticas. Por lo que sus esfuerzos se centraron en la recuperación, dejando de lado este examen.

El cuestionario, como se comentó previamente, forma parte de la evaluación de la unidad didáctica de Geometría Analítica. La prueba fue corregida por el profesor de la asignatura y el 84 % de los alumnos superó el examen. A modo ilustrativo en la Figura 22 se muestran las calificaciones obtenidas. Y en las Figuras 23 y 24 se analizan los resultados obtenidos en cada una de las preguntas del cuestionario. Este análisis no se hace con los resultados numéricos de la evaluación, sino en base al procedimiento utilizado por los

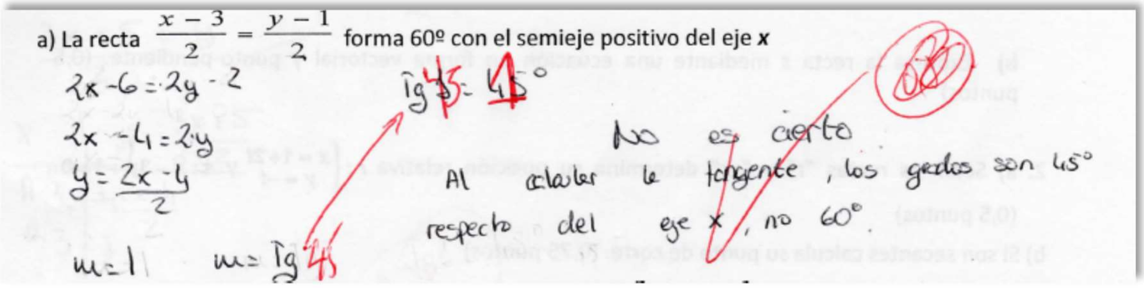


Figura 25. Ejercicio a. Método de resolución más utilizado.

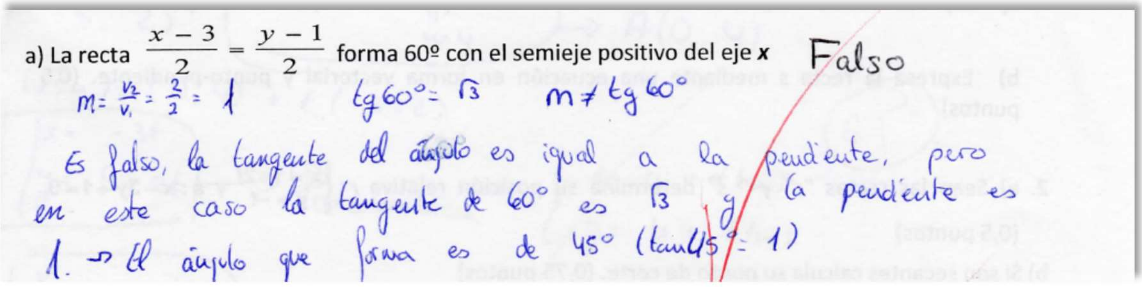


Figura 26. Ejercicio a. Resolución óptima.

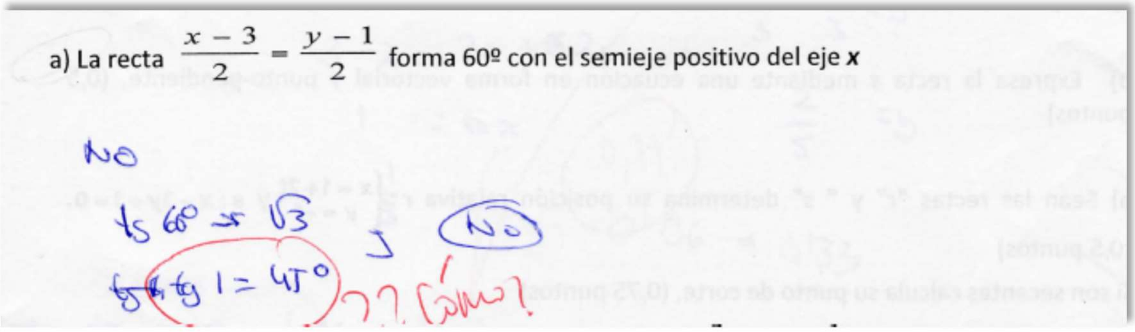


Figura 27. Ejercicio a. No justifica la solución.

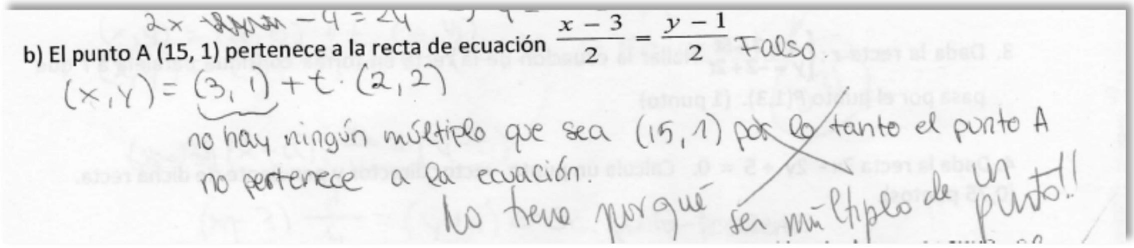
alumnos para resolver cada ejercicio. Los resultados se clasifican en: respuestas correctas y completas, respuestas incorrectas o incompletas y respuestas no contestadas.

Primera Parte – Razonamiento

Ejercicio a

En la Figura 23, se observa que 17 de los 25 alumnos respondieron satisfactoriamente. Se comprobó la hipótesis lanzada en el apartado 9.3 (Cuestiones y comportamientos esperados), ya que 11 de los 17 alumnos que resolvieron correctamente este ejercicio optaron por ese método para resolverlo (ver Figura 25).

Anecdóticamente, en este ejemplo puede verse el error al expresar trigonométricamente el valor de un ángulo. Esta situación se presentó más de una vez.

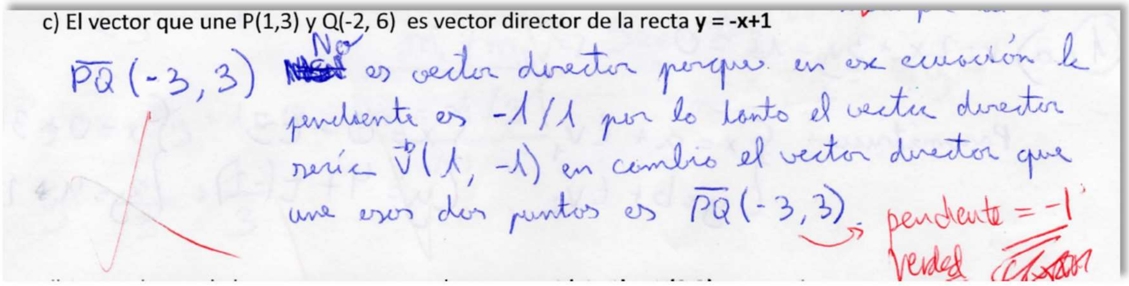

b) El punto A (15, 1) pertenece a la recta de ecuación $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{2}$ Falso

$(x, y) = (3, 1) + t \cdot (2, 2)$

no hay ningún múltiplo que sea (15, 1) ~~por lo tanto el punto A no pertenece a la ecuación~~

no tiene porqué ser múltiplo de un punto!!

Figura 28. Pregunta b. Error conceptual.


c) El vector que une P(1,3) y Q(-2, 6) es vector director de la recta **y = -x+1**

$\overline{PQ}(-3, 3)$ No es vector director porque en esa ecuación la pendiente es $-1/1$ por lo tanto el vector director sería $\vec{v}(1, -1)$ en cambio el vector director que une esos dos puntos es $\overline{PQ}(-3, 3)$

pendiente = -1

Verdad

Figura 29. Ejercicio c. Error Conceptual.

El otro método utilizado consistía en extraer la información directamente de la ecuación continua y no requería ningún tipo de operación (ver Figura 26). Sin embargo, fue poco utilizado.

Los errores se presentaron en 8 de 25 respuestas: 2 de los alumnos no contestaron la pregunta, 4 no argumentaron sus respuestas (ver Figura 27) y 2 calcularon la pendiente, pero no compararon con el dato.

Ejercicio b

En la Figura 23 se observa que el ejercicio fue resuelto correctamente por 20 de los 25 alumnos. El error de los 5 restantes fue conceptual, 4 alumnos proporcionan respuestas que no tienen un razonamiento lógico (ver Figura 28) y uno no contesta.

Ejercicio c

El análisis de resultados respalda la hipótesis (ver sección 9.3 Cuestiones y comportamientos esperados). Se esperaba que fuese el ejercicio más complicado de realizar, ya que los datos a comparar están en forma de vector director y pendiente, adicionalmente los vectores no son iguales sino proporcionales. De momento ha sido el ejercicio que más confusión ha generado. Solo 10 alumnos de los 25 ha respondido correctamente (ver Figura 23). Los 15 restantes han presentado los siguientes errores:

- 1 tiene error de concepto, no sabe cómo abordar el problema.
- 2 responden correctamente, pero no justifican sus afirmaciones.
- 7 calculan el vector director correctamente, pero no comparan con el vector que previamente deben identificar en la recta dada.
- 5 responden que los puntos no pertenecen a la recta, lo cual es correcto, pero no es lo que se les pregunta. No detectan que ambas rectas son paralelas y sus vectores son proporcionales, por lo que el vector director es el mismo (ver Figura 29).

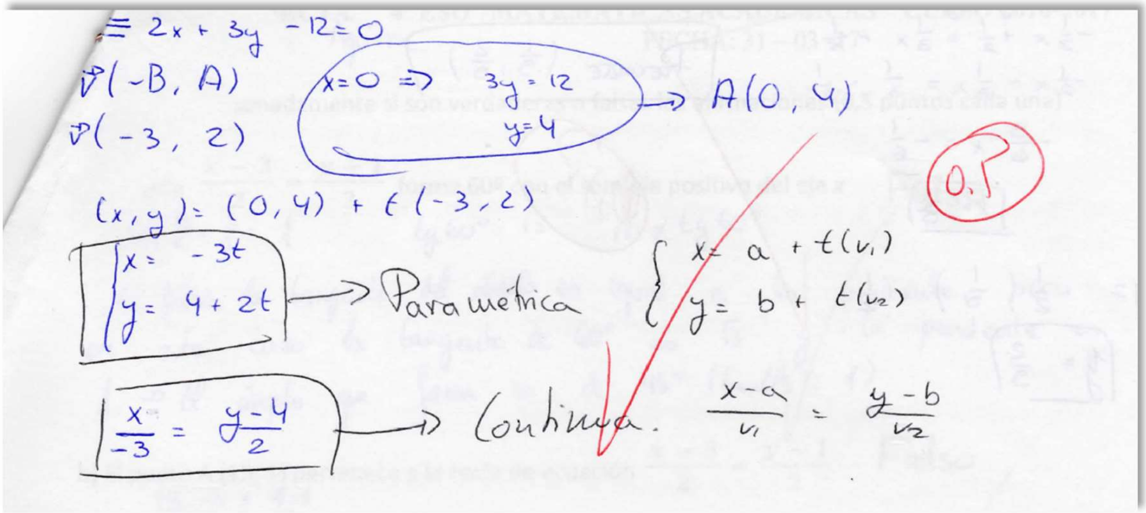


Figura 30. Ejercicio 1, apartado a. Procedimiento esperado.

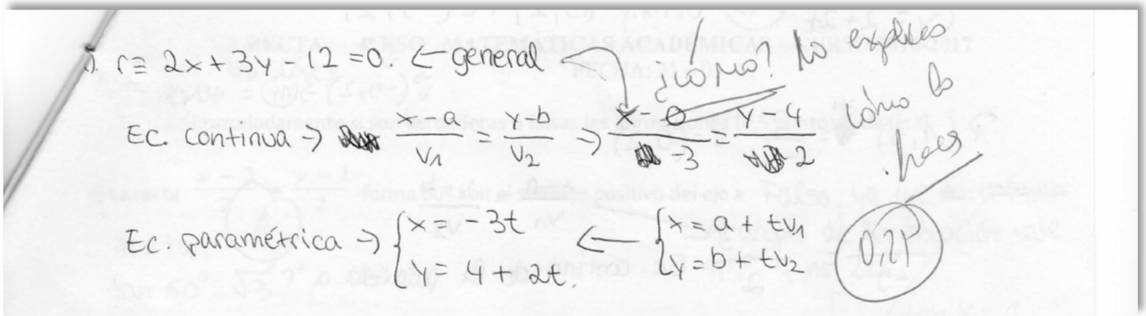


Figura 31. Ejercicio 1, apartado a. Error argumentativo.

Ejercicio d

Los resultados obtenidos, respaldan la tesis indicada en los comportamientos esperados de que este ejercicio sería el que menos problemas resolutivos tendría. De hecho, 23 alumnos lo resuelven correctamente (ver Figura 23).

Ejercicio e

De los 25 los alumnos 20 responden bien esta pregunta (ver Figura 23). Entre los que no lo hacen, los errores son básicamente tres:

- Error conceptual.
- Falta de justificación en los resultados.
- Error de cálculo.

Segunda Parte – Ejercicios

Ejercicio 1, apartado a

En la Figura 24 puede observarse que 15 de 25 alumnos realiza correctamente el ejercicio, de ellos la mitad sigue el procedimiento descrito en el análisis de los comportamientos esperados (ver Figura 30), mientras el resto identifica dos puntos, luego calcula el vector director y finalmente genera las ecuaciones.

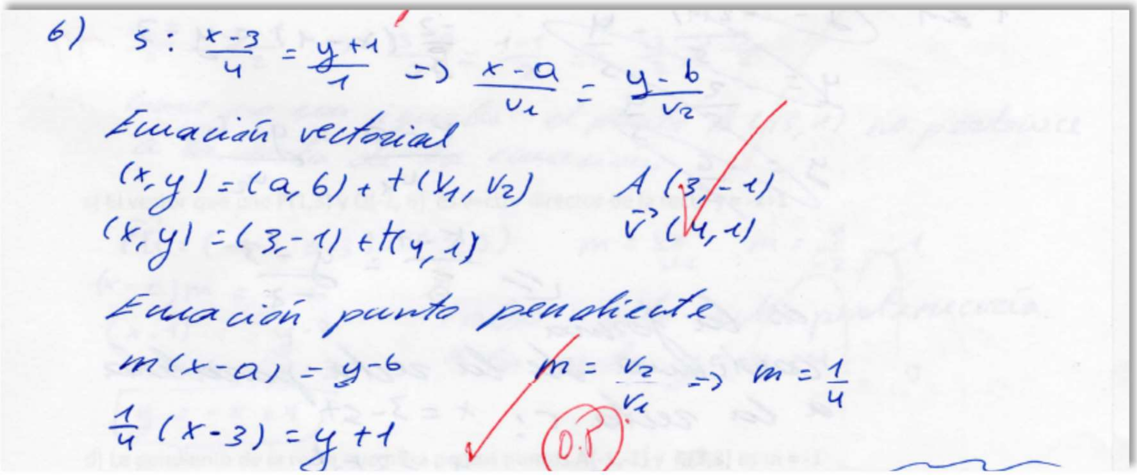


Figura 32. Ejercicio 1, apartado b. Realizado correctamente.

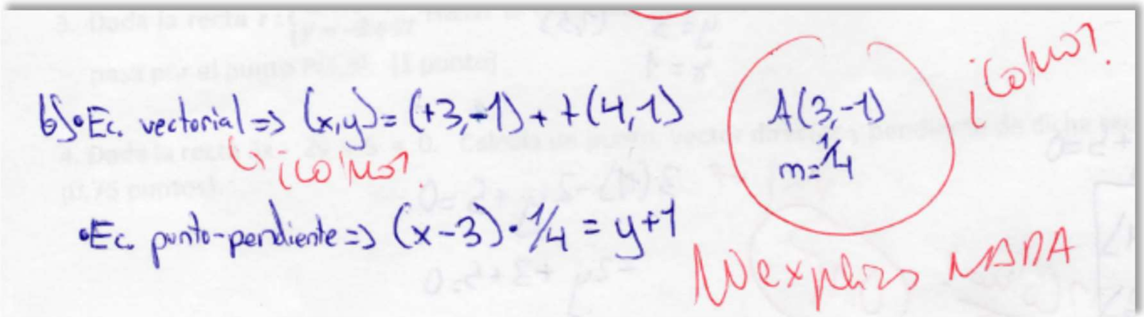


Figura 33. Ejercicio 1, apartado b. Error argumentativo.

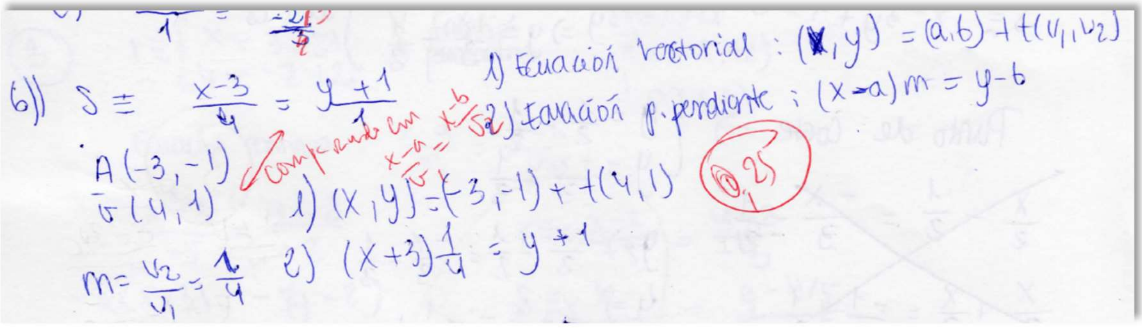


Figura 34. Ejercicio 1, apartado b. Realizado incorrectamente – Error al identificar el punto.

Ocho alumnos realizan el problema, pero no justifican cómo calculan el vector director o los puntos que toman como referencia. Es decir, aunque dominan los contenidos, no argumentan sus respuestas, sólo escriben los resultados sin demostrar el procedimiento utilizado (ver Figura 31). Por último, hay dos alumnos que no responden la pregunta.

Ejercicio 1, apartado b

El gráfico de la Figura 24 presenta la distribución de los resultados de este ejercicio. Se observa que 15 alumnos realizan el ejercicio bien y todos ellos siguieron el procedimiento esperado (ver Figura 34). De los 8 alumnos que no lo completan con éxito, 6 lo realizan, pero no justifican como obtienen los datos (ver Figura 33) y los otros 2 presentan errores identificando el punto o sustituyendo el vector director en la ecuación (ver Figura 34).

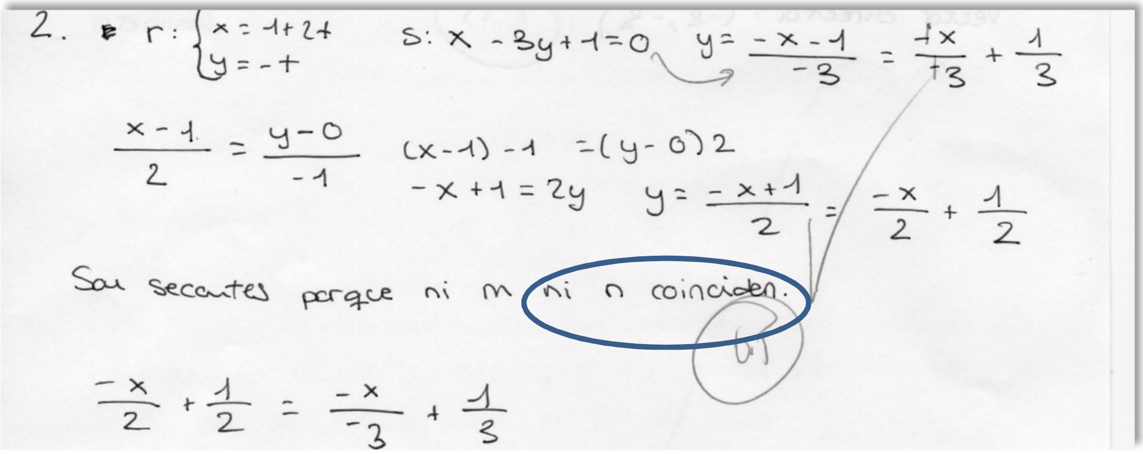


Figura 35. Ejercicio 2 apartado a. Resolución más utilizada

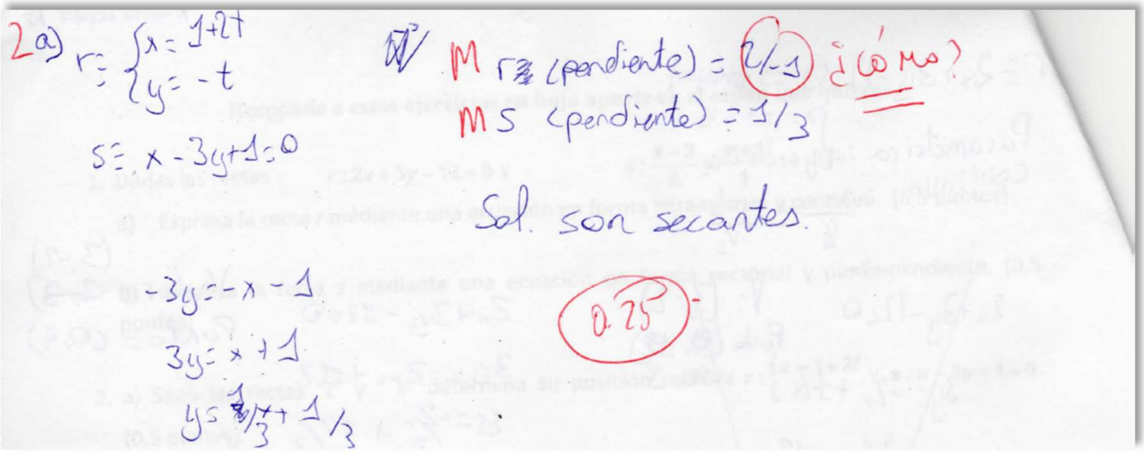


Figura 36. Ejercicio 2, apartado a. Error conceptual.

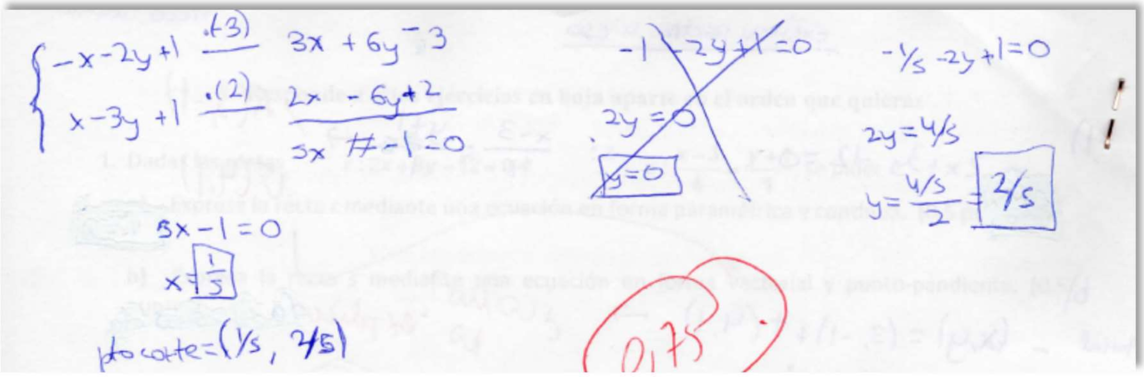


Figura 37. Ejercicio 2, apartado b. Resolución correcta.

<u>Ejercicio 2, apartado a</u>

Como se puede observar en la Figura 24, 20 alumnos resolvieron correctamente este apartado. La mayoría de estos alumnos optaron por transformar la ecuación dada en forma paramétrica a otra forma. Se ratifica así lo señalado como comportamiento esperado (ver Figura 35). El resto de los alumnos recurre a la forma más eficaz: identificar los vectores directamente en las ecuaciones dadas y comparar.

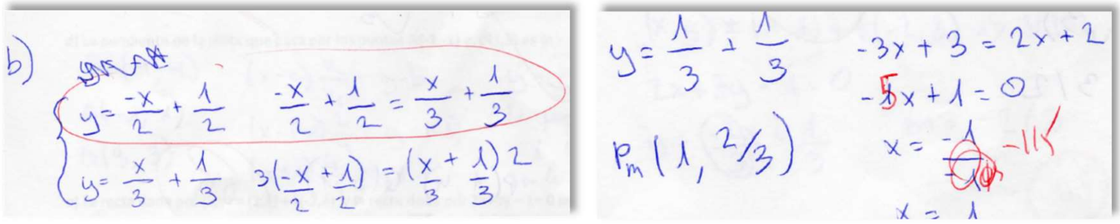


Figura 38. Ejercicio 2, apartado b. Error al operar la suma.

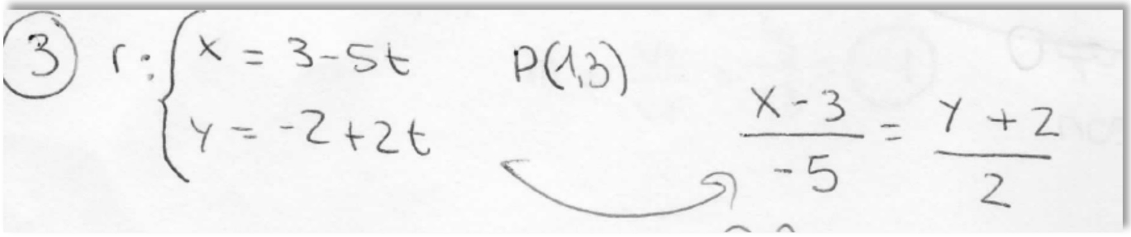


Figura 39. Ejercicio 3. Error argumentativo.

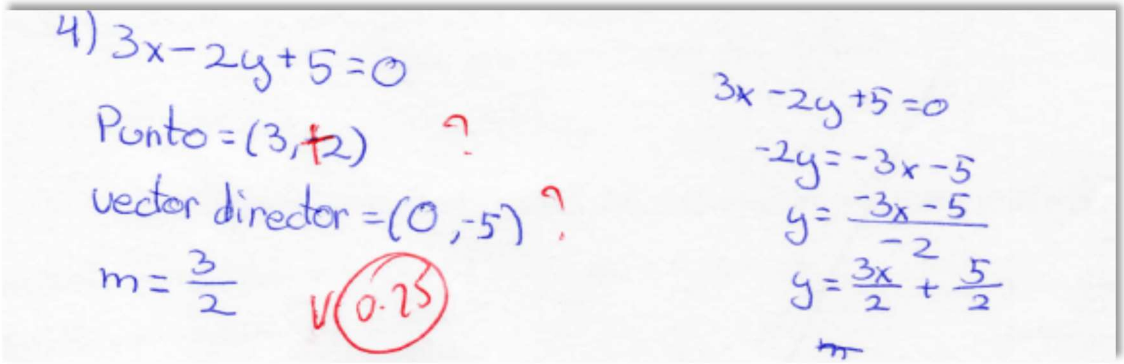


Figura 40. Ejercicio 4. Error Conceptual al interpretar los datos desde la ecuación general.

Las respuestas incorrectas de los alumnos se debieron a cálculos operaciones o errores conceptuales. En la Figura 36 puede apreciarse que no identifican correctamente el vector director en la ecuación inicial. Finalmente, hubo dos personas que no contestaron esta pregunta.

Ejercicio 2, apartado b

Como era de esperar hubo, menos respuestas correctas (ver Figura 24), que en el apartado a. Los fallos son consecuencia de errores previos o de cálculo que arrastran desde el apartado anterior.

Las respuestas correctas siguieron el método previsto, igualación de ecuaciones a excepción de un alumno que construyó un sistema de ecuaciones y lo resolvió por el método de reducción (ver Figura 37).

En Figura 38, se observa un fallo al sumar las incógnitas de la ecuación.

Por último, cabe destacar el aumento en el porcentaje de alumnos que no contestan esta pregunta.

Pregunta	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*1a*	*1b*	*2a*	*2b*	*3*	*4*	*Total*
Correcto	17	20	10	23	20	15	15	20	13	12	16	181
Incorrecto	8	5	15	2	5	10	10	5	12	13	9	94

Tabla 33. Distribución de los resultados de respuestas por preguntas.

Ejercicio 3

El análisis de los resultados (ver Figura 24), nos indica que 13 alumnos no completaron satisfactoriamente el ejercicio. De ellos, 2 alumnos no lo contestaron y los 11 restantes presentan los siguientes errores:

- 5 no justifican de donde obtienen los datos (ver imagen 39).
- 3 no culminan el ejercicio.
- 3 resuelven el ejercicio, pero comete errores al operar.

En cuanto a los ejercicios correctos, a diferencia de lo estimado en el análisis a priori, la mayoría de los alumnos identifica en la ecuación paramétrica el vector y, con el punto dado, expresa la ecuación solicitada. De hecho, el método sugerido como comportamiento esperado, sólo fue utilizado por un alumno, pero con resultado incorrecto

Ejercicio 4

Como se puede observar en la Figura 24, de los 25 alumnos, 16 realizaron el ejercicio correctamente siguiendo varios métodos resolutivos. 7 alumnos cometieron errores. De éstos, 3 no explicaban como llegaban a los resultados, 2 alumnos no interpretaron correctamente los datos de la ecuación general (ver Figura 40) y 2 cometieron errores de cálculo. Adicionalmente, 2 alumnos no contestaron la pregunta.

9.5.Discusión de los resultados

En esta sección final, se resumen los resultados anteriores, se discuten y se extraen conclusiones. De la Figura 22 se extrae que la calificación promedio es de 7 puntos sobre 10 y si se analizan los datos de la Tabla 33, se concluye que las respuestas correctas representan el 66 % del total de preguntas. Al dirigir el foco de atención en las respuestas incorrectas se observa que en 94 de 275 preguntas los alumnos incurrieron en algún tipo de error.

Éstos se clasificaron en tres tipos: conceptuales, argumentativos y algebraicos/operativos. A los efectos de este análisis, cuando un estudiante no contesta una pregunta se considera error de tipo conceptual, ya que los estudiantes entregaron los exámenes antes de agotarse el tiempo establecido para ello.

En la Figura 41, se presenta la distribución de los errores por preguntas y tipo de error. En ella se observa que la mayoría de los errores son conceptuales.

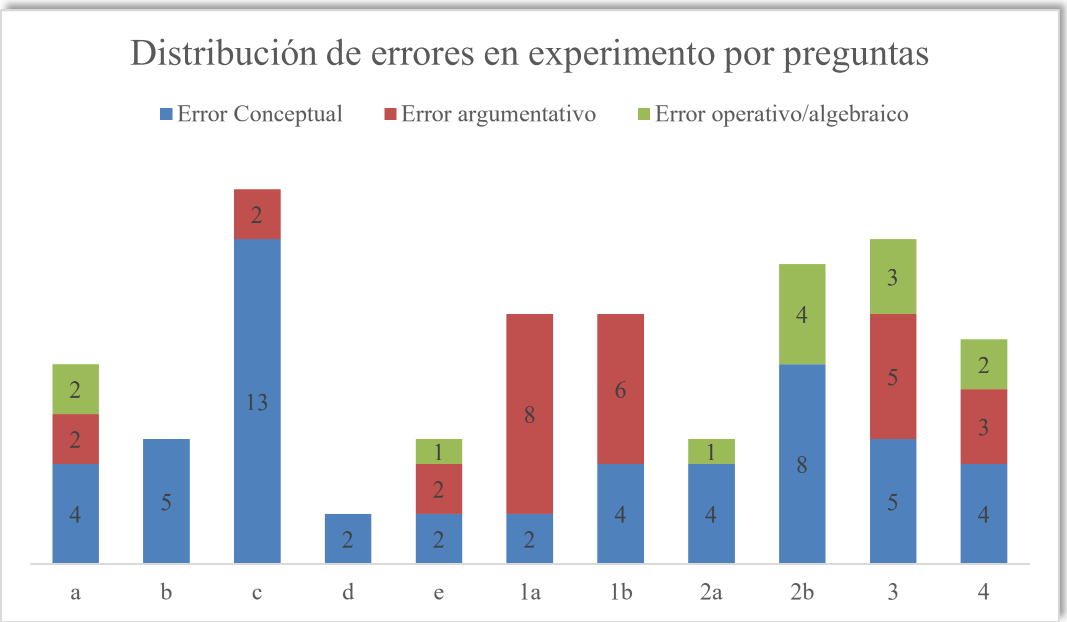


Figura 41. Distribución de errores por preguntas.

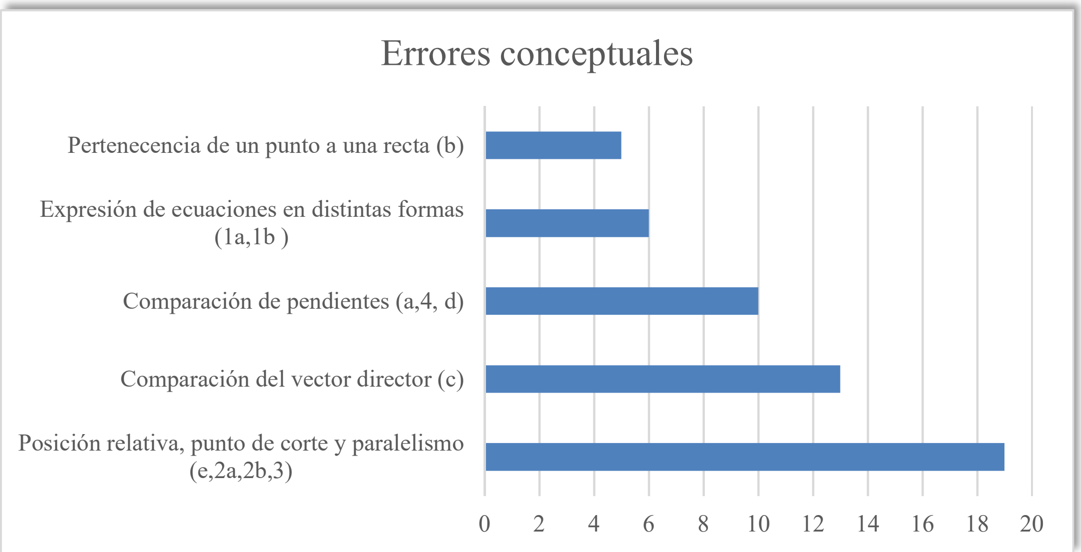


Figura 42. Clasificación de errores conceptuales

Como el objetivo final es determinar en qué contenido se comenten mayores fallos, se organizaron los resultados de los errores conceptuales en cinco categorías y se representaron gráficamente (ver Figura 42). De ella se concluye que la mayor presencia de errores está relacionada con los conceptos de posiciones relativas de las rectas y vector director. Por ello, de cara al futuro, es de importancia incorporar en la docencia medidas correctoras que permitan prevenir este tipo de errores. Los puntos concretos a trabajar serían:

- Reforzar los ejercicios de posiciones de la recta, puntos de corte y rectas paralelas.
- Reforzar que el vector director no tiene que pertenecer necesariamente a la recta, sino que puede ser paralelo.
- Reforzar los ejercicios de pertenencia de puntos a la recta.

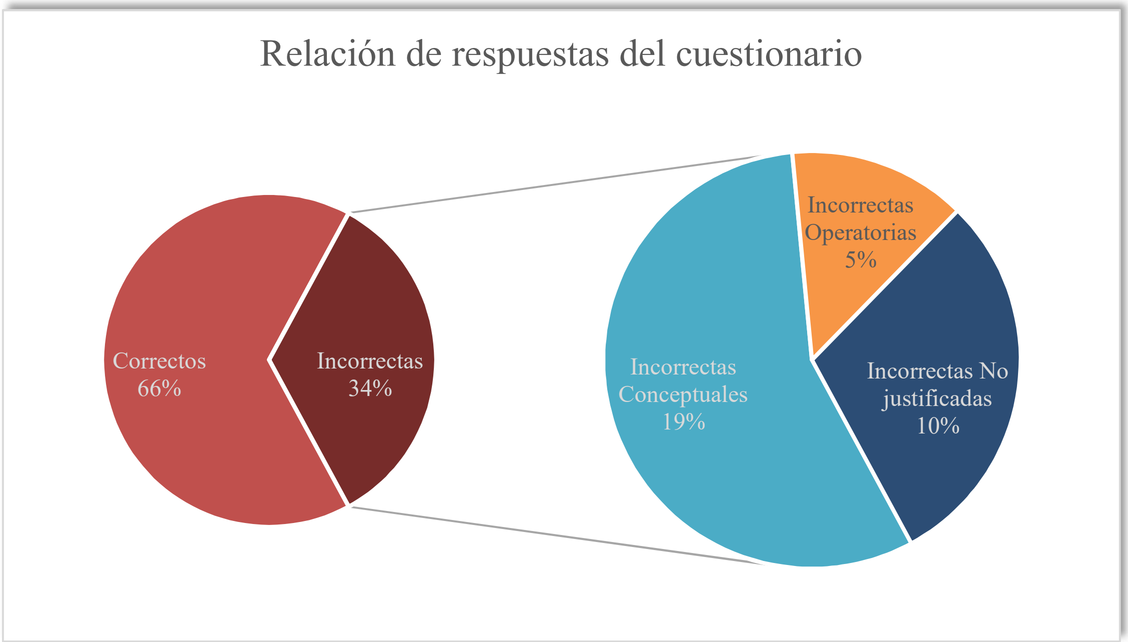


Figura 43. Relación de respuestas del cuestionario.

Retomando el análisis de los tipos de error (ver Figura 43), se observa que los errores del tipo argumentativo representan la segunda causa de error. No obstante, se considera que es un error que desvirtúa el análisis y, los resultados académicos, no así la adquisición de conocimientos. De hecho, en la muestra puede verse que los estudiantes dominan el concepto y resuelven el ejercicio, a pesar de ello, su resultado no es satisfactorio porque incita a dudas de cómo se logró. Sin embargo, creo que es el tipo de error más fácil de eliminar, si se insiste al alumno en que debe justificar sus respuestas y a la vez se les conciencia de cómo esta variable afecta a sus resultados. Además, lo interesante es que es extensible al resto de contenidos matemáticos tratados en el curso, es decir, que trabajando este aspecto podríamos mejorar los resultados no sólo en esta unidad sino en toda la asignatura.

Algo similar ocurre con la tercera causa de error: los errores operativos algebraicos, quizás parecieran anecdóticos, pero la realidad es que la dificultad de las operaciones realizadas en esta unidad didáctica es muy baja y, sin embargo, se observa cómo errores de este tipo afectan los resultados.

En resumen, podemos concluir que el 66 % de los alumnos aprueba los contenidos. Las respuestas incorrectas son consecuencia mayoritariamente de errores conceptuales. Esto confirma las predicciones intuidas en el capítulo 7, sobre el análisis a priori de las dificultades y errores previsibles.

El error argumentativo se sitúa en segundo lugar como responsable de los fallos en el cuestionario. Este error no fue considerado como una dificultad en el análisis del capítulo 7 y, aunque sí se tuvo en cuenta en el análisis de previo del cuestionario (capítulo 9.3) como un comportamiento esperado, no se estimó el grado de importancia que posteriormente la experimentación le dió.

Para finalizar, se comprobó la presencia de errores a consecuencia del manejo inadecuado del álgebra o la falta de destrezas al operar. Aunque ciertamente fueron residuales, no hay que olvidar que el nivel de complejidad de las operaciones necesarias para los contenidos trabajados en este cuestionario era bajo.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Breve síntesis

Este trabajo tiene como objetivo estudiar la resolución de problemas de las ecuaciones de la recta por alumnos de 4º de ESO.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte del trabajo se analizan los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables relacionados con las ecuaciones de la recta, presentes en los currículos vigentes, con la finalidad de ver cómo los contenidos se relacionan, se transforman y evolucionan. Posteriormente, se analizan los ejercicios, problemas y cuestiones tipo presentes en los libros de texto a fin de verificar que los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables estaban reflejados y eran coherentes con lo establecido por el currículo.

La segunda parte está vinculada a la experiencia docente desarrollada en un centro concertado de Pamplona, con alumnos de 4º de ESO orientado a las enseñanzas académicas. En esta parte se hace un análisis de la unidad didáctica identificando dificultades y errores previsibles, para establecer estrategias que nos permitan mejorar el proceso de aprendizaje del alumno. Finalmente, se describe una fase de experimentación en la cual se analizan los resultados y se contrastan las hipótesis formuladas a raíz de la identificación de dificultades.

Conclusiones generales del trabajo

De la experiencia en el centro educativo se concluye que la consolidación del aprendizaje se basa en afianzar los conceptos a través de la práctica de ejercicios y problemas. Éstos son básicamente ejercicios y problemas descontextualizados. Los libros de texto incluyen pocos problemas contextualizados y éstos están situados a continuación de los ejercicios propuestos, lo que reduce las posibilidades de que un estudiante los realice, salvo que sean asignados por el profesor.

Se observa que la práctica docente se apoya en medios tecnológicos como GeoGebra para complementar la docencia tradicional, sin embargo, la manipulación por parte de los estudiantes es más limitada.

De este trabajo, se concluye que los contenidos no están aislados, que es posible trabajarlos desde diferentes perspectivas y darles diferentes enfoques, aunque esto no se refleje en los libros de texto. En ellos, los contenidos se trabajan como bloques y no se suele mostrar su relación. Desde el punto de vista docente, es importante mostrar a los alumnos la relación entre el tema tratado y otros contenidos ya impartidos. También es relevante transmitir al alumnado la utilidad de los contenidos estudiados, tanto como herramienta matemática para resolver problemas en la asignatura como para abordar situaciones reales.

El desarrollo de este trabajo permite ver la utilidad de diseñar una programación didáctica. Nos permite analizar las dificultades que tendrán los alumnos y tomar las medidas preventivas necesarias para minimizar los errores al impartir la docencia. Asimismo, una vez culminada ésta, es muy útil analizar los resultados obtenidos con el fin de rediseñar la docencia para el próximo curso escolar.

El análisis de los resultados muestra la necesidad de realizar un trabajo sistemático con los alumnos para inculcarles el hábito de la argumentación y revisión de resultados como una medida para mejorar sus resultados académicos.

Cuestiones abiertas

¿Es conveniente realizar una prueba de diagnóstico para detectar las deficiencias antes de preparar la clase? ¿Cómo puede influir ésta para mejorar los resultados?

¿Es conveniente introducir ejercicios descontextualizados a la vez que los ejercicios sistemáticos, como una medida de familiarizar a los alumnos con el lenguaje real y mejorar la resolución de problemas contextualizados?

¿Por qué hay alumnos que dominan la práctica, a los que, sin embargo, les supone un esfuerzo adicional interpretar enunciados o responder a ejercicios teóricos? ¿Cómo se puede corregir esta situación?

¿El hecho de que haya estudiantes que resuelvan correctamente los ejercicios, aunque sigan un procedimiento poco eficiente es señal de que los contenidos no se han conseguido satisfactoriamente?

Referencias

Legislación:

- Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
- Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.
- Decreto Foral 24/2015 de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria de la Comunidad Foral de Navarra (transposición de la LOMCE).
- Orden Foral 54/2015 de 22 de mayo de 2015, por la que se regulas los Programas de Mejora del Aprendizaje y el Rendimiento en la Educación Secundaria Obligatoria en los centros educativos de la Comunidad Foral de Navarra (transposición de la LOMCE).
- Decreto Foral 24/2015 de 22 de abril, por el que se establece el currículo de las enseñanzas del Bachillerato en la Comunidad Foral de Navarra (transposición de la LOMCE).

Bibliografía:

- de Burgos, J. (2013). Algebra lineal y geometría cartesiana. 3ª ed., Madrid: McGraw-Hill.
- Godino, J.D., Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 131-155.
- Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf
- Godino, J.C., Bencomo, D., Font, V. Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis y valoración dela idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/idoneidad-didactica.pdf

Libros de texto:

- Nieto, M., Alcaide, F., y Pérez, A. (2015). Matemáticas 1 ESO. Madrid: SM.
- Nieto, M., Alcaide, F., y Pérez, A. (2016). Matemáticas 2 ESO. Madrid: SM.
- Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M., y Pérez, A. (2015). Matemáticas 3 ESO orientadas a las Enseñanzas Académicas. Madrid: SM.
- Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M., Pérez, A., y Donaire, J. (2015). Matemáticas 4 ESO orientadas a las Enseñanzas Académicas. Madrid: SM.
- Alcaide Guindo, F., Hernández, J., Moreno, M., Sanz, L., Serrano, E. (2015). Matemáticas I orientadas a las Enseñanzas Académicas. Madrid: SM.
- Alcaide Guindo, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., Rivière, V., Sanz, L. (2016). Matemáticas II orientadas a las Enseñanzas Académicas. Madrid: SM.

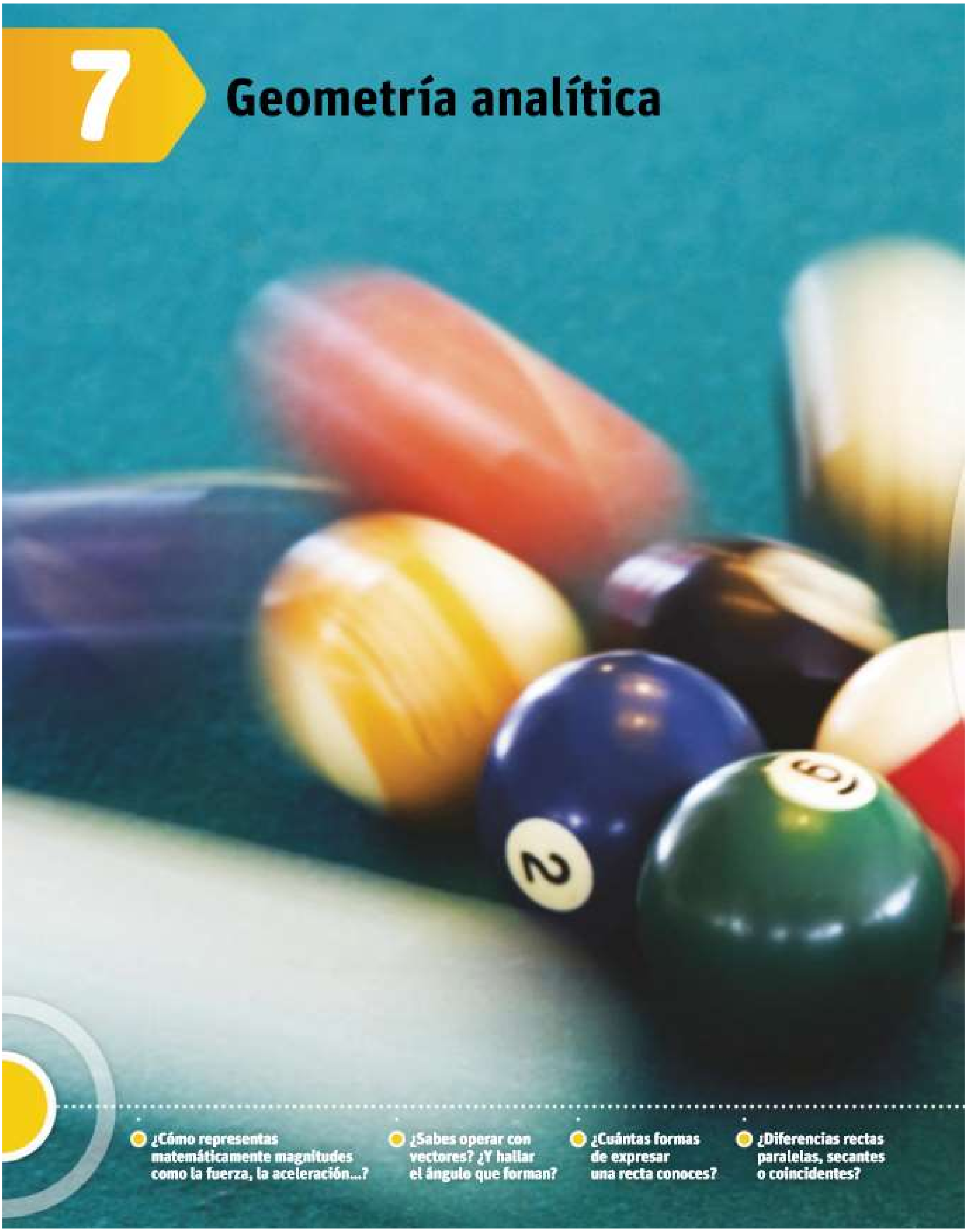
Anexos

I. **Unidad didáctica del libro de texto**

II. **Presentación PowerPoint Ecuaciones de la Recta**

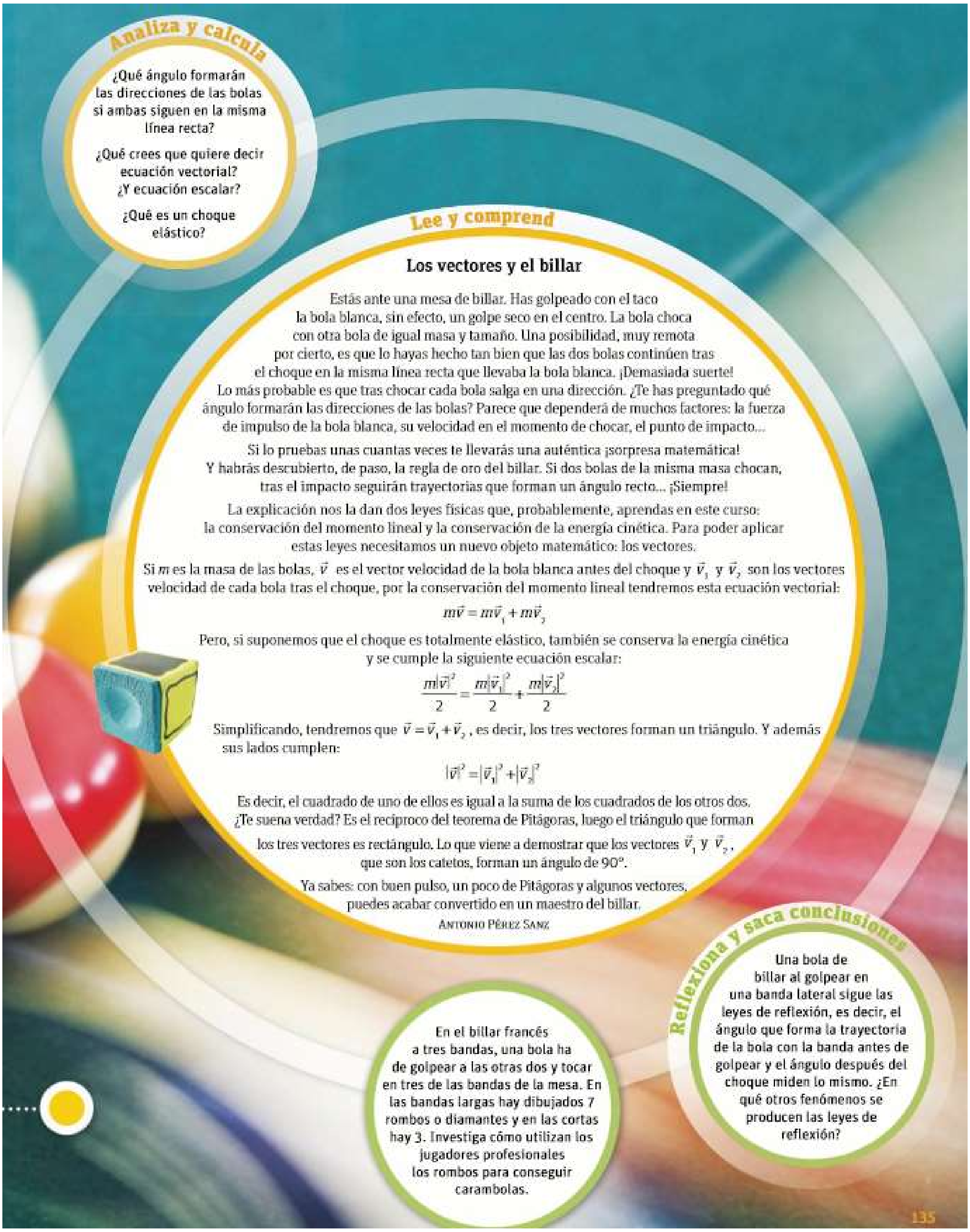
III. **Applets GeoGebra**

I. Unidad didáctica del libro de texto



7 Geometría analítica

- ¿Cómo representas matemáticamente magnitudes como la fuerza, la aceleración…?
- ¿Sabes operar con vectores? ¿Y hallar el ángulo que forman?
- ¿Cuántas formas de expresar una recta conoces?
- ¿Diferencias rectas paralelas, secantes o coincidentes?



Analiza y calcula

¿Qué ángulo formarán las direcciones de las bolas si ambas siguen en la misma línea recta?

¿Qué crees que quiere decir ecuación vectorial? ¿Y ecuación escalar?

¿Qué es un choque elástico?

Lee y comprend

Los vectores y el billar

Estás ante una mesa de billar. Has golpeado con el taco la bola blanca, sin efecto, un golpe seco en el centro. La bola choca con otra bola de igual masa y tamaño. Una posibilidad, muy remota por cierto, es que lo hayas hecho tan bien que las dos bolas continúen tras el choque en la misma línea recta que llevaba la bola blanca. ¡Demasiada suerte! Lo más probable es que tras chocar cada bola salga en una dirección. ¿Te has preguntado qué ángulo formarán las direcciones de las bolas? Parece que dependerá de muchos factores: la fuerza de impulso de la bola blanca, su velocidad en el momento de chocar, el punto de impacto…

Si lo pruebas unas cuantas veces te llevarás una auténtica ¡sorpresa matemática! Y habrás descubierto, de paso, la regla de oro del billar. Si dos bolas de la misma masa chocan, tras el impacto seguirán trayectorias que forman un ángulo recto… ¡Siempre!

La explicación nos la dan dos leyes físicas que, probablemente, aprendas en este curso: la conservación del momento lineal y la conservación de la energía cinética. Para poder aplicar estas leyes necesitamos un nuevo objeto matemático: los vectores.

Si m es la masa de las bolas, $\vec{v}$ es el vector velocidad de la bola blanca antes del choque y $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son los vectores velocidad de cada bola tras el choque, por la conservación del momento lineal tendremos esta ecuación vectorial:

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

Pero, si suponemos que el choque es totalmente elástico, también se conserva la energía cinética y se cumple la siguiente ecuación escalar:

$$\frac{m|\vec{v}|^2}{2} = \frac{m|\vec{v}_1|^2}{2} + \frac{m|\vec{v}_2|^2}{2}$$

Simplificando, tendremos que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, es decir, los tres vectores forman un triángulo. Y además sus lados cumplen:

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2$$

Es decir, el cuadrado de uno de ellos es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos. ¿Te suena verdad? Es el recíproco del teorema de Pitágoras, luego el triángulo que forman los tres vectores es rectángulo. Lo que viene a demostrar que los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, que son los catetos, forman un ángulo de 90°.

Ya sabes: con buen pulso, un poco de Pitágoras y algunos vectores, puedes acabar convertido en un maestro del billar.

ANTONIO PÉREZ SANZ

En el billar francés a tres bandas, una bola ha de golpear a las otras dos y tocar en tres de las bandas de la mesa. En las bandas largas hay dibujados 7 rombos o diamantes y en las cortas hay 3. Investiga cómo utilizan los jugadores profesionales los rombos para conseguir carambolas.

Reflexiona y saca conclusiones

Una bola de billar al golpear en una banda lateral sigue las leyes de reflexión, es decir, el ángulo que forma la trayectoria de la bola con la banda antes de golpear y el ángulo después del choque miden lo mismo. ¿En qué otros fenómenos se producen las leyes de reflexión?

135

1 Vectores fijos y libres en el plano

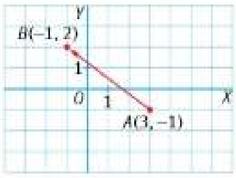
Sabías que...

Los vectores son esenciales en física y otras ciencias. Se utilizan para representar cualquier magnitud que, además de un valor, tiene dirección y sentido, como la velocidad, la aceleración o la fuerza.

Un **vector fijo** del plano, $\overrightarrow{AB}$, es un segmento orientado con **origen** en el punto **A** y **extremo** en el punto **B**.

Ejemplo ▸ Representa el vector de origen $A(3, -1)$ y de extremo $B(-1, 2)$.

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son $(-4, 3)$, ya que, como se observa en el dibujo, para ir desde el origen A hasta el extremo B se necesita avanzar 4 unidades hacia la izquierda y 3 hacia arriba.



Los elementos de un vector fijo son:

- **Módulo** de un vector es la distancia que separa a su origen de su extremo. Se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.
- **Dirección** de un vector es la dirección de la recta que pasa por su origen y por su extremo y la de todas sus paralelas.
- **Sentido** de un vector es el que queda determinado al ir desde el origen al extremo.

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y recuerda vectores fijos y libres.

Coordenadas de un vector dado por dos puntos

Las **coordenadas** del vector de origen el punto $A(a_1, a_2)$ y de extremo el punto $B(b_1, b_2)$ son las del extremo menos las del origen. Es decir:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)$$

Ejemplo ▸ Calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ de origen $A(3, -1)$ y de extremo $B(-1, 2)$.

El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene como coordenadas: $\overrightarrow{AB} = (-1 - 3, 2 - (-1)) = (-4, 3)$

Ten en cuenta

La distancia entre dos puntos cualesquiera P y Q se puede calcular como el módulo del vector que forman.

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$$

Módulo de un vector

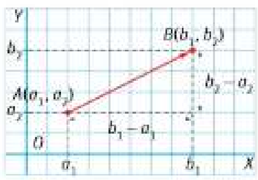
El **módulo** de un vector $\overrightarrow{AB}$ calculado a partir de las coordenadas de su origen y de su extremo es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Para demostrarlo, se representa $\overrightarrow{AB}$.

El módulo de $\overrightarrow{AB}$ es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por catetos $b_1 - a_1$ y $b_2 - a_2$.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Ten en cuenta

Si $|\overrightarrow{AB}| = 1$, el vector $\overrightarrow{AB}$ es unitario.

Ejemplo ▸ Calcula el módulo del vector de origen $A(3, -1)$ y de extremo $B(-1, 2)$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Como el módulo es 5, la distancia entre los puntos A y B es también 5.

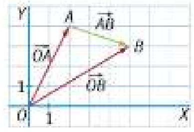
Página siguiente

Vector de posición

Un **vector de posición** es cualquier vector fijo que tenga como origen el origen de coordenadas. Las coordenadas de un vector de posición coinciden con las coordenadas de su extremo.

Ejemplo ▸ El vector de posición de origen $O(0, 0)$ y extremo el punto $A(3, 4)$ tiene las mismas coordenadas que su extremo: $\overrightarrow{OA} = (3, 4)$.

Ten en cuenta



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Vectores equipolentes

Dos vectores fijos no nulos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **equipolentes** cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

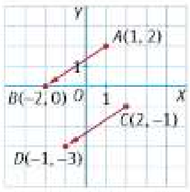
Dos vectores equipolentes **tienen las mismas coordenadas**.

Ejemplo ▸ Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, ya que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Las coordenadas de ambos vectores son iguales:

$\overrightarrow{AB} = (-2 - 1, 0 - 2) = (-3, -2)$

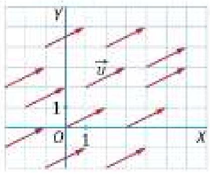
$\overrightarrow{CD} = (-1 - 2, -3 - (-1)) = (-3, -2)$



Vectores libres del plano

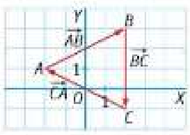
El conjunto formado por todos los vectores equipolentes a un vector fijo dado se denomina **vector libre**. Se representa por $\vec{u}$.

- Cada vector fijo que pertenece a un vector libre es un representante del vector libre.
- El módulo, dirección y sentido de un vector libre son el módulo, dirección y sentido de cualesquiera de sus representantes.



ACTIVIDADES

1. Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$.



ACTIVIDAD **RESUELTA**

2. Las coordenadas del vector libre $\vec{u}$ son $(-5, 4)$, y las del origen A de uno de sus representantes, $(4, -6)$. Calcula las coordenadas del extremo B de ese representante.

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (4, -6) + (-5, 4) = (-1, -2)$

Por tanto, las coordenadas de B son $(-1, -2)$.

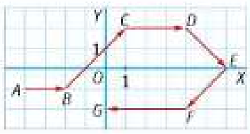
3. Las coordenadas de un punto P son $(1, 3)$, y las del vector $\overrightarrow{PQ}$, $(-2, -2)$. Calcula las coordenadas de Q y de $\overrightarrow{QP}$.

4. Calcula el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ en cada caso.

a) Origen $A(-1, 0)$ y extremo $B(3, 5)$

b) Origen $A(7, -4)$ y extremo $B(-2, 3)$

5. Identifica los vectores equipolentes de la imagen y los vectores libres que determinan.



6. Calcula la distancia entre los puntos:

a) $A(5, -3)$ y $B(1, -1)$ b) $C(-2, 3)$ y $D(-1, -4)$

7. Los vértices de un triángulo son $A(3, 5)$, $B(10, 0)$ y $C(4, -1)$.

a) Calcula los vectores que forman cada lado.

b) Halla la longitud de cada lado.

137

2 Operaciones con vectores. Combinación lineal

Sabías que...

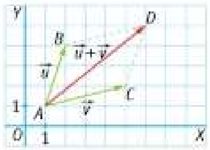
Sir William Rowan Hamilton
(1805-1865)
Los términos "vector" y "escalar" los acuñó en 1846 Hamilton, un brillante matemático irlandés que a los 13 años ya hablaba 13 idiomas.

Suma de dos vectores libres

Para sumar gráficamente dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del plano se pueden utilizar dos procedimientos:

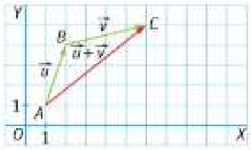
1.º

- Se toma un representante $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ y otro $\overrightarrow{AC}$ de $\vec{v}$, que tengan el mismo origen A.
- Se construye el paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. El cuarto vértice del paralelogramo es el punto D.
- La suma de vectores $\vec{u}+\vec{v}$ es el vector libre que tiene como representante al vector de origen A y extremo D: $\overrightarrow{AD}$.



2.º

- Se toma un representante $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ y otro $\overrightarrow{BC}$ de $\vec{v}$ de forma que el extremo del representante de $\vec{u}$ coincida con el origen del representante de $\vec{v}$.
- La suma de vectores $\vec{u}+\vec{v}$ es el vector libre que tiene como representante al vector de origen A y extremo C: $\overrightarrow{AC}$.



Para hallar las coordenadas del vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ se suman las coordenadas de $\vec{u}=(u_1, u_2)$ con las de $\vec{v}=(v_1, v_2)$.

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,\ u_2+v_2)$$

Ejemplo ► Se considera el triángulo de vértices $A(-4, 3)$, $B(5, 6)$ y $C(-1, -3)$. Comprueba que la suma $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ coincide con el vector $\overrightarrow{AC}$.

Se calculan las coordenadas de cada vector:

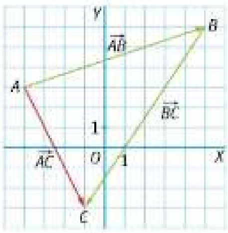
$\overrightarrow{AB}=(5-(-4), 6-3)=(9, 3)$

$\overrightarrow{BC}=(-1-5, -3-6)=(-6, -9)$

$\overrightarrow{AC}=(-1-(-4), -3-3)=(3, -6)$

Se comprueba que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(9, 3)+(-6, -9)=(3, -6)=\overrightarrow{AC}$



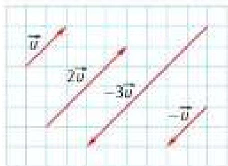
Producto de un número por un vector

El producto de un número real k por un vector libre $\vec{u}$ es otro vector $k\vec{u}$ con los siguientes elementos:

- El **módulo** es el producto del valor absoluto de k por el módulo de $\vec{u}$:

$$|k\vec{u}|=|k||\vec{u}|$$

- La **dirección** es la dirección de $\vec{u}$.
- El **sentido** coincide con el sentido de $\vec{u}$ si $k>0$ y es contrario si $k<0$.



Para hallar las coordenadas del vector $k\vec{u}$ se multiplican las dos coordenadas de $\vec{u}$ por k:

$$k\vec{u}=k(u_1, u_2)=(ku_1, ku_2)$$

MAT-TIC GeoGebra
Entra en smSaviadigital.com y recuerda suma y resta de vectores.

Página siguiente

Combinación lineal de vectores

MAT-TIC GeoGebra
Entra en smSaviadigital.com y recuerda combinación lineal.

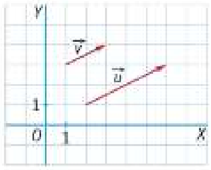
Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes si tienen la misma dirección. En este caso, sus coordenadas son proporcionales:

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

Ejemplo ▸ ¿Son linealmente dependientes $\vec{u} = (4, 2)$ y $\vec{v} = (2, 1)$?

Sus coordenadas son proporcionales, $\vec{u} = 2\vec{v}$, por tanto, son linealmente dependientes.

En la gráfica se observa que son paralelos, es decir, tienen la misma dirección.



El vector $\vec{w}$ es **combinación lineal** de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si se pueden encontrar dos números reales a y b, tales que:

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

Se dice que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son **linealmente dependientes**.

Ejemplo ▸ ¿Es el vector $(-3, 4)$ combinación lineal de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$?

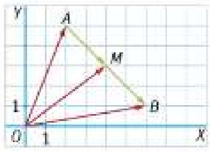
Es combinación lineal pues existen dos números reales $a = -3$ y $b = 4$ que cumplen que

$$(-3, -4) = (-3)(1, 0) + 4(0, 1)$$

Punto medio de un segmento

Las coordenadas del **punto medio M** de un segmento AB son combinación lineal de las coordenadas de sus extremos. Si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$:

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$



$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OA} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

ACTIVIDADES

8. Si $\vec{u} = (-3, 2)$, $\vec{v} = (1, 2)$ y $\vec{w} = (0, 3)$, realiza las operaciones:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $5\vec{u} + \vec{w}$ c) $\vec{v} + \vec{w}$ d) $3\vec{w} + 2\vec{v}$

9. Dados los vectores $\vec{u} = (4, 2)$, $\vec{v} = (-6, 3)$ y $\vec{w} = (2, 0)$, indica si son linealmente dependientes:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ b) $\vec{u}$ y $\vec{w}$ c) $\vec{v}$ y $\vec{w}$

ACTIVIDAD **RESUELTA**

10. Estudia si $A(-2, 3)$, $B(1, -4)$ y $C(4, -11)$ están alineados.

A, B y C estarán alineados si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales.

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (1+2, -4-3) = (3, -7)\\ \overrightarrow{AC} &= (4+2, -11-3) = (6, -14)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$$

Por tanto, los puntos A, B y C están alineados.

11. Comprueba si los puntos $A(-2, 3)$, $B(-2, 1)$ y $C(-5, 5)$ están alineados.

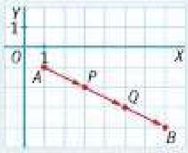
ACTIVIDAD **RESUELTA**

12. Halla los puntos P y Q, que dividen el segmento de extremos $A(1, -1)$ y $B(7, -4)$ en tres partes iguales.

Si se considera el vector:

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 1, -4 - (-1)) = (6, -3)$$

se observa que:



$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{6}{3}, -\frac{3}{3}\right) = (2, -1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = (1, -1) + (2, -1) = (3, -2)$$

Por tanto, el punto P es $P(3, -2)$.

Siguiendo el mismo procedimiento:

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AP} = (1, -1) + 2(2, -1) = (5, -3) \Rightarrow Q(5, -3)$$

13. Dado el segmento de extremos $A(2, -5)$ y $B(10, -1)$, halla los puntos P, Q y R que dividen AB en cuatro partes iguales.

139

3 Producto escalar de dos vectores. Aplicaciones

Ten en cuenta

La suma de dos vectores es otro vector. Sin embargo, el producto escalar de dos vectores es un número.

El **producto escalar** de dos vectores libres es el número que resulta de multiplicar los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman, es decir:

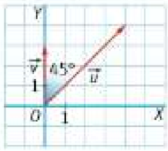
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\vec{u},\,\vec{v})$$

Ejemplo ▸ Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u}=(4,4)$ y $\vec{v}=(0,3)$.

Se calculan sus módulos:

$|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}$ $\quad |\vec{v}|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=\sqrt{0^2+3^2}=3$

Y su producto escalar es: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{32}\cdot 3\cdot\cos 45°=4\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=12$



smSaviadigital.com

PRACTICA Utiliza el producto escalar para construir tu cometa.

Si se calcula el producto escalar de un vector $\vec{u}$ por sí mismo, se obtiene:

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}||\vec{u}|\cos 0°=|\vec{u}|^2$$

El **módulo** de un vector también se puede definir como $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.

Producto escalar conocidas las coordenadas

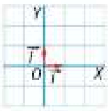
El **producto escalar** de los vectores $\vec{u}=(u_1,\,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,\,v_2)$ es:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2$$

Ten en cuenta

El sistema de referencia formado por $\{O;\,\vec{i},\,\vec{j}\}$ con $|\vec{i}|=1=|\vec{j}|$ y $(\widehat{\vec{i},\vec{j}})=90°$ se denomina sistema de referencia ortonormal.

Para probarlo, como los vectores $\vec{i}=(1,0)$ y $\vec{j}=(0,1)$ son unitarios, porque su módulo es 1 y son perpendiculares entre sí, se cumple que:



- $\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}||\vec{i}|\cos 0°=1\cdot 1\cdot 1=1$
- $\vec{j}\cdot\vec{j}=|\vec{j}||\vec{j}|\cos 0°=1\cdot 1\cdot 1=1$
- $\vec{i}\cdot\vec{j}=|\vec{i}||\vec{j}|\cos 90°=1\cdot 1\cdot 0=0$

Cualquier vector del plano se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$. Así, los vectores $\vec{u}=(u_1,\,u_2)$ y $\vec{v}=(v_1,\,v_2)$ se pueden expresar como:

Ten en cuenta

El producto escalar es una operación que verifica las propiedades conmutativa y distributiva respecto de la suma:

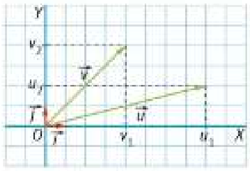
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

$$\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j} \qquad \vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}$$

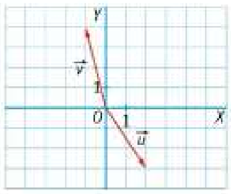
Por tanto:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1\vec{i}+u_2\vec{j})\cdot(v_1\vec{i}+v_2\vec{j})=$$
$$=u_1v_1\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{i}}_{1}+u_1v_2\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{j}}_{0}+u_2v_1\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{i}}_{0}+u_2v_2\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{j}}_{1}=u_1v_1+u_2v_2$$



Ejemplo ▸ Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u}=(2,-3)$ y $\vec{v}=(-1,4)$.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=2(-1)+(-3)4=-2-12=-14$



Ángulo entre dos vectores

A partir del producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se puede calcular el coseno del ángulo que forman.

El **coseno del ángulo** que forman los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$

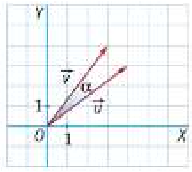
MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y practica el producto escalar y calcula el ángulo entre dos vectores.

Ejemplo ▸ Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (4, 3)$ y $\vec{v} = (3, 4)$.

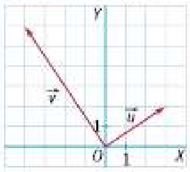
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \frac{12+12}{\sqrt{16+9}\sqrt{9+16}} = \frac{24}{25}$$

$$\alpha = \arccos\frac{24}{25} = \arccos 0{,}96 = 16^\circ\, 16'$$



Dos vectores **no nulos son perpendiculares** cuando su producto escalar vale cero.

Ejemplo ▸ Comprueba si los vectores $\vec{u} = (3, 2)$ y $\vec{v} = (-4, 6)$ son perpendiculares.



Para comprobar que forman un ángulo de 90° se calcula el producto escalar.

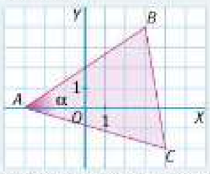
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3(-4) + 2 \cdot 6 = -12 + 12 = 0$

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD RESUELTA

14. Dado el triángulo de vértices $A(-3, 0)$, $B(3, 4)$ y $C(4, -2)$ calcula el ángulo del vértice A y la medida del lado BC.

Se representa el triángulo:



Para hallar el ángulo α se consideran los vectores:

$\overrightarrow{AB} = (6, 4)$ $\quad \overrightarrow{AC} = (7, -2)$

$$\cos\alpha = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{42-8}{\sqrt{52}\sqrt{53}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = 0{,}6476 \Rightarrow \alpha = \arccos 0{,}6476 = 49^\circ\, 38'$$

La medida del lado BC es el módulo del vector $\overrightarrow{BC}$:

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(4-3)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

15. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 2)$ y $\vec{v} = (-1, 3)$, calcula su producto escalar, sus módulos y el ángulo que forman.

ACTIVIDAD RESUELTA

16. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (-2, 2m)$ y $\vec{v} = (m-1, 3)$ sean perpendiculares.

Para que sean perpendiculares su producto escalar debe ser 0.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2m + 2 + 6m = 0 \Rightarrow 4m + 2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$

17. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (m, 2m-1)$ y $\vec{v} = (1-m, m)$:

a) Sean perpendiculares.

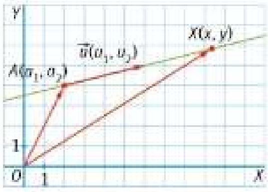
b) Tengan módulo 1.

18. Comprueba que el triángulo de vértices $A(8, 9)$, $B(2, 1)$ y $C(1, 8)$ es rectángulo e indica el vértice correspondiente al ángulo recto.

19. Calcula los ángulos del triángulo $A(-1, 0)$, $B(2, -1)$ y $C(4, 2)$. ¿Suman 180°?

141

4 Ecuaciones de la recta



Ecuación vectorial de la recta

Una recta del plano queda determinada si se conoce un punto $A(a_1, a_2)$ y su vector director, es decir, un vector libre $\vec{u} = (u_1, u_2)$ que lleva su dirección.

Un punto $X(x, y)$ pertenece a una recta r si los vectores $\overrightarrow{AX}$ y $\vec{u}$ son proporcionales, es decir, existe t tal que $\overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{u}$.

Utilizando vectores de posición, se cumple: $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = t\vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u}$

La **ecuación vectorial** de una recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y tiene por vector director $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es el conjunto de puntos $X(x, y)$ que cumplen:

$$(x, y) = (a_1, a_2) + t(u_1, u_2), \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo ▸ Halla la ecuación vectorial de la recta que pasa por $A(2, -1)$ y tiene como dirección la del vector $\vec{u} = (3, -2)$.

Sustituyendo: $(x, y) = (2, -1) + t(3, -2)$

Ecuaciones paramétricas de la recta

Al operar en la ecuación vectorial e igualar, se obtienen las ecuaciones paramétricas.

Las **ecuaciones paramétricas** de la recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y tiene como dirección $\vec{u} = (u_1, u_2)$ son: $\begin{cases} x = a_1 + tu_1 \\ y = a_2 + tu_2 \end{cases}$ donde $t \in \mathbb{R}$

Ejemplo ▸ Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por $A(-1, 5)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u} = (-2, 3)$.

Se sustituyen las coordenadas del punto y del vector director: $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y encuentra las ecuaciones de la recta vectorial, paramétricas, continua y general.

smSaviadigital.com

PRACTICA Encuentra el tesoro utilizando el mapa y todo lo que has aprendido sobre geometría.

Ecuación continua de la recta y ecuación general

Al despejar e igualar el parámetro t en las paramétricas se obtiene la ecuación continua.

La **ecuación continua** de la recta que pasa por $A(a_1, a_2)$ y tiene como dirección $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es: $\dfrac{x - a_1}{u_1} = \dfrac{y - a_2}{u_2}$

Transformando la ecuación continua para escribir todos los términos en el primer miembro, se obtiene la ecuación general.

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} \Rightarrow u_2(x - a_1) = u_1(y - a_2) \Rightarrow \underbrace{u_2}_{A} x \underbrace{- u_1}_{B} y \underbrace{- u_2 a_1 + u_1 a_2}_{C} = 0 \Rightarrow Ax + By + C = 0$$

La **ecuación general** de la recta es de la forma: $Ax + By + C = 0$

El vector $\vec{n} = (A, B)$ se llama **vector normal** y es perpendicular al vector director de la recta.

Ejemplo ▸ Halla las ecuaciones continua y general de la recta r que pasa por $A(3, -2)$ y lleva la dirección del vector $\vec{u} = (-2, 3)$.

- Continua: $\dfrac{x - 3}{-2} = \dfrac{y + 2}{3}$
- General: $3x - 9 = -2y - 4 \Rightarrow 3x + 2y - 5 = 0$

Ten en cuenta

El vector normal $\vec{n} = (A, B) = (u_2, -u_1)$ y el vector director $\vec{u} = (u_1, u_2)$ son perpendiculares por ser su producto escalar nulo:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (u_1, u_2) \cdot (u_2, -u_1) = u_1 u_2 - u_2 u_1 = 0$$

Ecuación explícita. Pendiente y ordenada en el origen

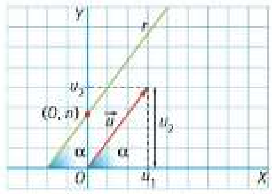
Al despejar ***y*** en la ecuación general se obtiene la **ecuación explícita**:

$$y = mx + n$$

- *m* es la **pendiente** de la recta y representa la tangente del ángulo α que forma la recta con la parte positiva del eje *X*: $m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{u_2}{u_1}$
- *n* es la **ordenada en el origen** y representa el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas $x = 0$.

MAT-TIC GeoGebra

Entra en smSaviadigital.com y calcula la ecuación explícita.



Ecuación punto-pendiente

La **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por el punto $A(a_1, a_2)$ y tiene por pendiente *m* es $\boldsymbol{y - a_2 = m(x - a_1)}$.

Si (u_1, u_2) es el vector director, se deduce de la ecuación continua:

$$\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} \Rightarrow y - a_2 = \frac{u_2}{u_1}(x-a_1) \Rightarrow y - a_2 = m(x-a_1)$$

Ejemplo ▸ Halla la ecuación de la recta punto-pendiente si el vector director es (3, 1) y pasa por el punto (0, 2).

La pendiente es $m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{3}$, por tanto, la ecuación es $y - 2 = \frac{1}{3}(x - 0)$.

Ten en cuenta

Las rectas verticales tienen pendiente infinita y no se pueden expresar con las ecuaciones habituales. Son de la forma $x = k$.

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD **RESUELTA**

20. Comprueba si el punto $A(3, -1)$ pertenece a $r: \begin{cases} x = -1-2t \\ y = 5+3t \end{cases}$.

Se sustituyen sus coordenadas:

$$\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 5+3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = -1-2t \\ -1 = 5+3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$$

Como el valor de *t* en las ecuaciones coincide, se deduce que *A* sí pertenece a la recta.

21. Indica si $A(0, -1)$ y $B(6, -1)$ pertenecen o no a las rectas.

a) $r: \begin{cases} x = 3+3t \\ y = -2-t \end{cases}$ b) $s: 2x - 3y = 15$

22. Halla un punto, un vector director y un vector normal de cada una de las siguientes rectas.

a) $4x - 3y - 1 = 0$ b) $y = x$ c) $(x, y) = (-3, 2) + t(-1, 4)$

23. Halla dos puntos de cada una de las siguientes rectas y el vector director.

a) $(x, y) = (1, 1) + t(0, -3)$ c) $y - 3 = -2(x + 5)$

b) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3-5t \end{cases}$ d) $x = \frac{y+4}{5}$

ACTIVIDAD **RESUELTA**

24. Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $P(-3, -1)$ y $Q(0, 0)$.

Si *P* y *Q* están en la recta, el vector $\overrightarrow{PQ}$ es un vector director de la recta.

$\overrightarrow{PQ} = (0 - (-3), 0 - (-1)) = (3, 1)$. Por tanto, la ecuación continua es: $\frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{1} \Rightarrow \frac{x}{3} = y$

25. Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos:

a) $P(-2, 3)$ y $Q(1, 2)$ b) $P(0, 3)$ y $Q(-2, -3)$

26. Calcula la ecuación general de la recta que pasa por $P(-2, 3)$ y tiene pendiente $m = -4$.

27. Calcula, en todas sus formas posibles, la ecuación de la recta en los siguientes casos.

a) Pasa por el punto $A(5, -2)$ y lleva la dirección de $\vec{u} = (1, -3)$.

b) Pasa por el punto $A(-5, 4)$ y tiene pendiente $m = -2$.

c) Pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(5, -2)$.

Calcula la pendiente y la ordenada en el origen de cada una.

143

Página siguiente

5 Problemas de incidencia

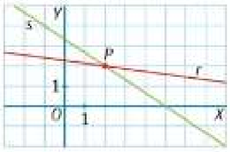
smSaviadigital.com

PRACTICA Comprueba lo que has aprendido a lo largo de la unidad.

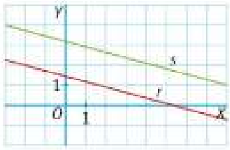
Posición relativa de dos rectas en el plano

Dos rectas en el plano pueden ser:

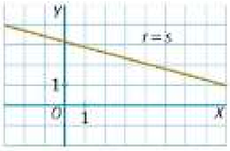
- **Secantes** cuando tienen un único punto en común. Sus vectores directores no son proporcionales, es decir, las rectas tienen distinta dirección y, por tanto, distinta pendiente.



- **Paralelas** cuando no tienen ningún punto en común. Sus vectores directores son proporcionales. Las rectas tienen la misma pendiente y diferente ordenada en el origen.



- **Coincidentes** cuando tienen infinitos puntos en común. Sus vectores directores son proporcionales y las rectas pasan por un mismo punto, es decir, tienen la misma pendiente y la misma ordenada en el origen.



MAT-TIC GeoGebra

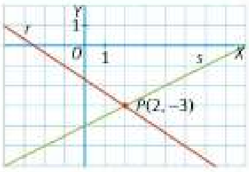
Entra en smSaviadigital.com y estudia las posiciones relativas de las rectas.

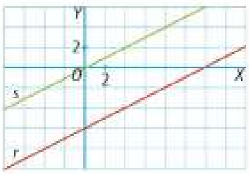
Al expresar en forma general dos rectas, $r: Ax + By + C = 0$ y $s: A'x + B'y + C' = 0$, sus pendientes y ordenadas en el origen son:

$$m = -\frac{A}{B} \qquad m' = -\frac{A'}{B'} \qquad n = -\frac{C}{B} \qquad n' = -\frac{C'}{B'}$$

Por tanto, para determinar su posición relativa se puede utilizar el siguiente criterio:

- Son **secantes** si $\boldsymbol{m \neq m'}$, es decir, si $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A'}} \neq \dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{B'}}$.
- Son **paralelas** si $\boldsymbol{m = m'}$, pero $\boldsymbol{n \neq n'}$, es decir, si $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A'}} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{B'}} \neq \dfrac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{C'}}$.
- Son **coincidentes** si $\boldsymbol{m = m'}$ y $\boldsymbol{n = n'}$, es decir, si $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A'}} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{B'}} = \dfrac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{C'}}$.





Ejemplo ▸ Estudia la posición relativa de las rectas y halla, en su caso, el punto de corte:

- $r: 2x + 3y + 5 = 0$ y $s: x - 2y - 8 = 0$

  Se estudian los coeficientes de x e y:

  $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{3}{-2} \Rightarrow$ Las rectas son secantes, es decir, se cortan en un punto P. Para calcularlo, se resuelve el sistema:

  $$\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ x - 2y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ -2x + 4y + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow 7y + 21 = 0 \Rightarrow y = -3,\ x = 2$$

  El punto de corte es $P(2, -3)$.

- $r: -x + 2y + 12 = 0$ y $s: 2x - 4y = 0$

  $\dfrac{-1}{2} = \dfrac{2}{-4} \neq \dfrac{12}{0} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas y, por tanto, no se cortan en ningún punto.

Rectas paralelas a una dada

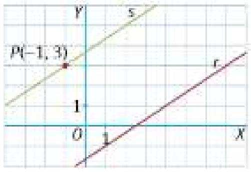
Dada la recta de ecuación general $\mathbf{Ax + By + C = 0}$, todas las rectas **paralelas** a ella tienen por ecuación:

$\mathbf{Ax + By + k = 0}$, donde $\mathbf{k}$ es cualquier número real.

Ejemplo ► Halla la recta s que es paralela a la recta r: $2x - 3y - 5 = 0$ y que pasa por el punto $P(-1, 3)$:

Se escriben todas las rectas paralelas a r: $2x - 3y + k = 0$

- Como pasa por P, el punto debe verificar la ecuación. Resolviendo la ecuación se obtiene el valor de k: $2 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 + k = 0 \Rightarrow k = 11$
- La ecuación de s es: $2x - 3y + 11 = 0$



Rectas perpendiculares a una dada

Dada la recta de ecuación general $\mathbf{Ax + By + C = 0}$, todas las rectas **perpendiculares** a ella tienen por ecuación:

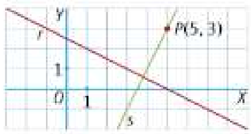
$\mathbf{Bx - Ay + k = 0}$, donde $\mathbf{k}$ es cualquier número real.

Ten en cuenta

Los vectores (A, B) y $(B, -A)$ son perpendiculares, ya que su producto escalar es 0.

Ejemplo ► Halla la recta s que es perpendicular a la recta r: $x + 2y = 5$ y que pasa por el punto $P(5, 3)$.

- Se escriben todas las rectas perpendiculares a r: $2x - y + k = 0$
- Se calcula k, obligando a que pase por P: $2 \cdot 5 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = -7$
- La ecuación de s es: $2x - y - 7 = 0$



ACTIVIDADES

28. Estudia la posición relativa de las rectas:

a) r: $2x + y - 5 = 0$ y s: $4x + 3y = 11$

b) $r: \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{5}{4} = 0$ y s: $2x - 3y - 5 = 0$

ACTIVIDAD **RESUELTA**

29. Estudia, a partir de m y n, las posiciones relativas de:

$$r: 3x - my + 2 = 0 \text{ y } s: -6x - y + n = 0$$

$$\frac{3}{-6} = \frac{-m}{-1} \Rightarrow -3 = 6m \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{-6} = \frac{2}{n} \Rightarrow 3n = -12 \Rightarrow n = -4$$

Para $m = -\frac{1}{2}$ y $n = -4$, las rectas son coincidentes.

Para $m = -\frac{1}{2}$ y $n \neq -4$, las rectas son paralelas.

Para $m \neq -\frac{1}{2}$, las rectas son secantes.

30. Calcula el valor de m para que las rectas r: $5x + my + 1 = 0$ y s: $-x - y + 3 = 0$ sean paralelas. ¿Hay algún valor de m que las haga coincidentes? ¿Y secantes?

31. Halla la ecuación de la recta paralela a r: $3x - 4y = 12$ y que pasa por el punto $P(5, -5)$.

32. Halla la ecuación de la recta perpendicular a r: $-2x - 4y = 5$ y que pasa por el origen de coordenadas.

33. Dada la recta de ecuaciones paramétricas $r: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$:

a) Calcula su ecuación general.

b) Halla la recta paralela a r que pasa por $A(-1, 4)$.

c) Halla la recta perpendicular a r que pasa por $(-2, 2)$.

34. Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$ y es paralela a la que tiene por ecuación $7x - 14y + 3 = 0$.

35. Comprueba si las rectas r y s son perpendiculares.

a) $r: \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}y = -6$ y $s: \frac{5}{6}x - \frac{3}{5}y = -8$

b) $r: \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = 0$ y $s: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 - \frac{9}{8}t \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 - \frac{1}{2}t \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + 10t \end{cases}$

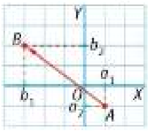
145

Organiza tus ideas

Página siguiente

VECTORES DEL PLANO

Vector fijo del plano



Origen: $A(a_1, a_2)$

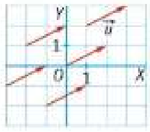
Extremo: $B(b_1, b_2)$

Coordenadas: $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

Elementos de un vector

- **Módulo:** $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$
- **Dirección:** la de la recta que pasa por su origen y por su extremo.
- **Sentido:** el correspondiente a ir de su origen a su extremo.

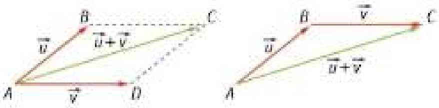
Vector libre



Todos los vectores equipolentes a un vector fijo

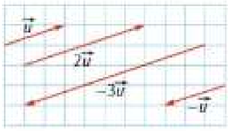
OPERACIONES CON VECTORES

Suma de vectores



$$\begin{cases} \vec{u} = (u_1, u_2) \\ \vec{v} = (v_1, v_2) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Producto de un número por un vector



$$k \cdot (u_1, u_2) = (ku_1, ku_2)$$

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \qquad \begin{cases} \vec{u} = (u_1, u_2) \\ \vec{v} = (v_1, v_2) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Ángulo entre dos vectores

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

ECUACIONES DE LA RECTA

Vectorial

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{u} \Rightarrow (x, y) = (a_1, a_2) + t(u_1, u_2)$$

Paramétricas

$$\begin{cases} x = a_1 + t u_1 \\ y = a_2 + t u_2 \end{cases}$$

Continua

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2}$$

General

$$Ax + By + C = 0$$

Punto-pendiente

$$y - a_2 = m(x - a_1)$$

Explícita

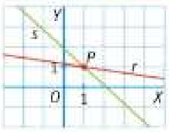
$$y = mx + n$$

Donde $A(a_1, a_2)$: punto de la recta, $\vec{u} = (u_1, u_2)$: vector director, $m = \frac{u_2}{u_1}$: pendiente y n: ordenada en el origen.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

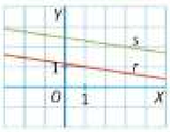
$r: Ax + By + C = 0 \qquad s: A'x + B'y + C' = 0$

Secantes



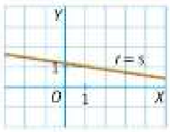
$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$$

Paralelas



$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

Coincidentes



$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

Actividades clave

1. Escribe el vector $\vec{a}=(-13, 17)$ como combinación lineal de los vectores:

$\vec{u}=(-1, 3)$

$\vec{v}=(4, -1)$

Para que sea combinación lineal deben existir dos números reales, λ y μ, tales que $\vec{a}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$.

$\vec{a}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \Rightarrow (-13, 17)=\lambda(-1, 3)+\mu(4, -1) \Rightarrow (-13, 17)=(-\lambda+4\mu, 3\lambda-\mu)$

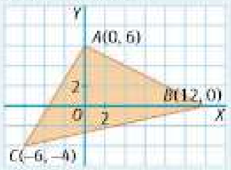
$$\begin{cases} -\lambda+4\mu=-13 \\ 3\lambda-\mu=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda+4\mu=-13 \\ 12\lambda-4\mu=68 \end{cases} \Rightarrow 11\lambda=55 \Rightarrow \lambda=5,\ \mu=-2$$

Por tanto: $\vec{a}=5\vec{u}-2\vec{v}$

2. Clasifica el triángulo de vértices $A(0, 6)$, $B(12, 0)$ y $C(-6, -4)$:

a) Según sus lados.

b) Según sus ángulos.



a) Para estudiar si es equilátero, isósceles o escaleno, se calculan las medidas de los lados:

- $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{12^2+(-6)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$
- $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-6)^2+(-10)^2}=\sqrt{136}=2\sqrt{34}$
- $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-18)^2+(-4)^2}=\sqrt{340}=2\sqrt{85}$

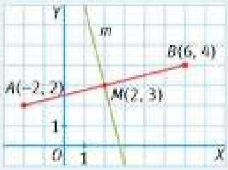
Al ser medidas diferentes, el triángulo es escaleno.

b) Para estudiar si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo, se calculan los ángulos del triángulo:

$$\cos\hat{A}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{(12,-6)\cdot(-6,-10)}{\sqrt{180}\cdot\sqrt{136}}=\frac{-72+60}{\sqrt{180}\cdot\sqrt{136}}=-0{,}0767 \Rightarrow \hat{A}=94^\circ\ 24'$$

Como el triángulo tiene un ángulo mayor de 90°, es obtusángulo.

3. Calcula la mediatriz del segmento de extremos $A(-2, 2)$ y $B(6, 4)$.



La mediatriz del segmento de extremos A y B es la recta m que pasa por el punto medio M del segmento y que es perpendicular a la recta r que pasa por A y B.

- Ecuación de la recta r que pasa por A y B:

$$\frac{x+2}{6-(-2)}=\frac{y-2}{4-2} \Rightarrow \frac{x+2}{8}=\frac{y-2}{2} \Rightarrow \frac{x+2}{4}=y-2 \Rightarrow x+2=4y-8 \Rightarrow x-4y=-10$$

- Todas la rectas perpendiculares a la recta r son de la forma: $4x+y+k=0$
- Se calcula el punto medio, M, del segmento de extremos A y B: $M\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{2+4}{2}\right)=M(2, 3)$
- De todas las perpendiculares, se elige la que pasa por el punto M:

$$4\cdot 2+3+k=0 \Rightarrow k=-11 \Rightarrow m: 4x+y-11=0$$

4. Calcula las ecuaciones de las medianas y el baricentro del triángulo de vértices $A(1, 3)$, $B(3, -1)$ y $C(-3, -2)$.

Las medianas de un triángulo son las rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. El baricentro es el punto donde se cortan las medianas.

- Se calculan los puntos medios de los lados del triángulo:

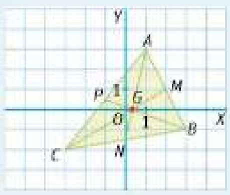
$$M\left(\frac{1+3}{2}, \frac{3-1}{2}\right)=M(2, 1),\ N\left(\frac{3-3}{2}, \frac{-1-2}{2}\right)=N\left(0, -\frac{3}{2}\right) \text{ y } P\left(\frac{1-3}{2}, \frac{3-2}{2}\right)=P\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

- Se calculan las ecuaciones de las medianas:

$$m_{AN}: \frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{-\frac{9}{2}} \Rightarrow -\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}=-y+3 \Rightarrow 9x-2y-3=0$$

$$m_{CM}: \frac{x+3}{5}=\frac{y+2}{3} \Rightarrow 3x+9=5y+10 \Rightarrow 3x-5y-1=0$$

$$m_{BP}: \frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{3}{2}x-\frac{9}{2}=-4y-4 \Rightarrow 3x+8y-1=0$$



- Se calcula el baricentro resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de dos medianas:

$$\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 3x+8y=1 \end{cases} \Rightarrow -13y=0 \Rightarrow y=0,\ x=\frac{1}{3} \Rightarrow G\left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

147

Actividades

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

Coordenadas de vectores y equipolencia

36. Decide en cuáles de los siguientes casos los puntos A, B y C están alineados y en cuáles forman un triángulo.

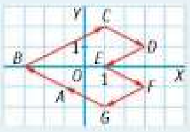
a) $A(-1, -5)$, $B(0, -3)$, $C(-2, -7)$

b) $A(1, -2)$, $B(0, 1)$, $C(-2, 7)$

c) $A(1, 2)$, $B(2, 7)$, $C(-1, 3)$

ACTIVIDAD **RESUELTA**

37. Identifica los vectores equipolentes y los vectores libres que determinan.



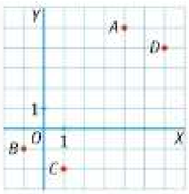
Son equipolentes:

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{GA}$, que determinan $\vec{u}=(-2, 1)$.

$\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$, que determinan $\vec{v}=(2, -1)$.

$\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{FG}$, que determinan $\vec{w}=(-2, -1)$.

38. Dados los puntos A, B, C y D, calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$. ¿Cuáles de ellos son equipolentes?



39. Calcula las coordenadas del punto A y el módulo del vector $\overrightarrow{AB}=(5, 3)$, si el punto B es $(-1, 4)$.

40. Calcula la distancia entre los puntos:

a) $A(4, -2)$ y $B(0, 9)$ b) $C(-1, 10)$ y $D(8, -5)$

41. Calcula los puntos P, Q, R y S que dividen el segmento de extremos $A(-2, 6)$ y $B(13, -4)$ en cinco partes iguales.

ACTIVIDAD **RESUELTA**

42. Calcula el valor de m para que los puntos $A(1, 2)$, $B(-2, m-2)$ y $C(3, -m)$ estén alineados.

Para que A, B y C estén alineados debe verificarse que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ sean proporcionales. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-3, m-4)\\ \overrightarrow{AC}=(2, -m-2)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-3}{2}=\frac{m-4}{-m-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3m+6=2m-8 \Rightarrow m=-14$$

43. Calcula el valor o los valores de m para que los puntos A, B y C estén alineados:

a) $A(5, 0)$, $B(2, 4)$, $C(m, 8)$

b) $A(-2, 2)$, $B(m, m-1)$, $C(0, -6)$

c) $A(4, -5)$, $B(m, -4)$, $C(2, -m)$

Operaciones con vectores y dependencia lineal

44. Realiza estas operaciones con vectores.

a) $(2, -1)-(4, 3)$ d) $4(1, -1)+2(3, 0)$

b) $6(-3, 1)+(10, -2)$ e) $(3, -1)-5(1, -2)$

c) $2(-4, 0)-3(-1, 2)$ f) $(9, 6)-2(4, 1)$

45. Dados los vectores $\vec{u}=(5, -3)$, $\vec{v}=(-1, 4)$ y $\vec{w}=(2, 2)$, calcula:

a) $\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w})$ d) $5\vec{w}-3\vec{v}+\vec{u}$

b) $3\vec{u}-2(\vec{w}-\vec{v})$ e) $2(\vec{w}+\vec{v})-\vec{u}$

c) $\frac{1}{2}(\vec{v}-\vec{u})$ f) $\frac{3}{4}\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}$

46. Calcula el valor de x e y en cada caso.

a) $(5, -9)=3(x, y)-2(x, 0)$

b) $(x, -4)=2(y, 5)+(3, x)$

c) $(2y, 0)=(x, y)-2(x, 5)$

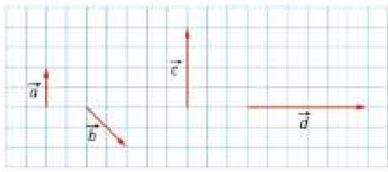
d) $(3x, -y)=2(1, -x)+(y, 9)$

47. Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo de vértices $A(2, 1)$, $B(2, 5)$ y $C(-2, 3)$.

48. Estudia si los vectores $\vec{u}=(2, -4)$, $\vec{v}=(3, 1)$ y $\vec{w}=(11, -15)$ son linealmente dependientes.

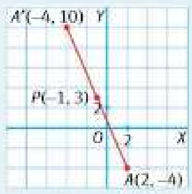
49. Escribe $\vec{a}=(-7, -9)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}=(4, -3)$ y $\vec{v}=(5, 1)$.

50. Expresa los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



ACTIVIDAD **RESUELTA**

51. Calcula el punto simétrico de $A(2, -4)$ respecto de $P(-1, 3)$.



Para que A' sea el simétrico de A respecto de P, se debe verificar que P sea el punto medio del segmento de extremos A y A':

$$\left.\begin{array}{l}A(2, -4)\\ P(-1, 3)\\ A'(a, b)\end{array}\right\} \Rightarrow -1=\frac{2+a}{2},\ 3=\frac{-4+b}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=-4,\ b=10 \Rightarrow A'(-4, 10)$$

52. Calcula el punto simétrico de:

a) $A(-3, 7)$ respecto del punto $P(0, -3)$.

b) $A(3, 1)$ respecto del punto $P(2, 2)$.

c) $A\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ respecto del punto $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Página siguiente

Producto escalar. Aplicaciones

53. Dados $\vec{u} = (5, 8)$, $\vec{v} = (-2, 6)$, y $\vec{w} = (-1, -3)$, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{u} \cdot \vec{w}$ c) $\vec{v} \cdot \vec{w}$ d) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

54. Conocidos los vectores $\vec{u} = (-6, 8)$ y $\vec{v} = (1, 7)$, realiza las siguientes operaciones.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $(-2\vec{u}) \cdot \vec{v}$ c) $|\vec{u} - 3\vec{v}|$ d) $|2\vec{v} - 3\vec{u}|$

55. Estudia si las siguientes parejas de vectores son perpendiculares entre sí.

a) $\vec{u} = (6, 9)$ y $\vec{v} = (-3, 2)$

b) $\vec{u} = (2, 4)$ y $\vec{v} = (-8, -4)$

c) $\vec{u} = (-3, 6)$ y $\vec{v} = (10, 5)$

d) $\vec{u} = (-1, -2)$ y $\vec{v} = (4, 2)$

56. Calcula el ángulo que forman los vectores:

a) $\vec{u} = (-2, -4)$ y $\vec{v} = (2, -1)$

b) $\vec{a} = (3, 9)$ y $\vec{b} = (2, -1)$

c) $\vec{u} = (2, \sqrt{3})$ y $\vec{v} = (\sqrt{3}, 1)$

57. Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3}$.

58. Comprueba si son perpendiculares los vectores $\vec{u} = (6, 15)$ y $\vec{v} = (5, -2)$.

59. Halla el valor de a para que los vectores $\vec{u} = (a, 3)$ y $\vec{v} = (-1, 5)$ sean perpendiculares.

60. Calcula el valor de a para que los vectores $\vec{u} = (4, 3)$ y $\vec{v} = (a, 1)$ formen un ángulo de 45°.

61. Determina mediante vectores si el triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(0, 1)$ y $C(3, 2)$ es rectángulo.

62. Clasifica los siguientes triángulos según sus lados y según sus ángulos.

a) $A(3, 4)$, $B(4, -1)$, $C(-1, -2)$

b) $A(-1, -2)$, $B(3, 4)$, $C(6, -2)$

Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas

63. Comprueba si el punto $B(4, -6)$ pertenece a alguna de las rectas siguientes.

a) $y = 9 - 3x$ b) $5x + 3y - 2 = 0$

64. Determina el vector director, un vector normal y un punto de las siguientes rectas.

a) $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+4}{5}$ c) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$

b) $(x, y) = (4, 0) + t(2, -6)$ d) $4x - y = 0$

65. Obtén un punto, un vector director y la pendiente de la recta de ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5t \end{cases}$$

66. Escribe de todas las formas posibles la ecuación de las siguientes rectas.

a) Pasa por el punto $A(3, 1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (5, -2)$.

b) Pasa por el punto $A(-2, 2)$ y su pendiente es $m = -3$.

67. Escribe de todas las formas posibles la ecuación de las rectas:

a) r: $3x - 2y = -10$ c) r: $y = -2x + 3$

b) $r: \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+1}{2}$ d) $r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - 3t \end{cases}$

68. Halla la pendiente y un punto por el que pasa cada una de las siguientes rectas y represéntalas gráficamente.

a) $\dfrac{x+1}{2} = y$ c) $5x - 2y + 3 = 0$

b) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-2}{-4}$ d) $\dfrac{x}{8} - \dfrac{y}{5} = 1$

69. ¿Son secantes las rectas r: $4x - 5y - 2 = 0$ y s: $y = 2x - 4$? En caso afirmativo, calcula su punto de corte.

70. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas.

a) r: $4x - 6y + 10 = 0$ y s: $2x - 3y + 4 = 0$

b) r: $2x + 3y + 6 = 0$ y s: $6x + 9y + 18 = 0$

71. Estudia la posición relativa de estos pares de rectas y, si son secantes, halla su punto de corte.

a) r: $2x - 5y + 7 = 0$ y s: $x - 2y - 2 = 0$

b) r: $6x + 4y - 12 = 0$ y s: $3x + 2y - 6 = 0$

c) r: $x - 5y + 3 = 0$ y s: $3x - 15y + 8 = 0$

72. Calcula la ecuación general de las rectas que contienen a los lados del triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(1, -1)$ y $C(2, -2)$.

ACTIVIDAD **RESUELTA**

73. **Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(5, -4)$ y forma un ángulo de 30° con la parte positiva del eje de abscisas.**

Como la recta forma un ángulo de 30° con la parte positiva del eje X, su pendiente valdrá:

$$m = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Utilizando la ecuación punto-pendiente:

$$y + 4 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 5) \Rightarrow 3y + 12 = \sqrt{3}x - 5\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x - 3y - 12 - 5\sqrt{3} = 0$$

74. Calcula la ecuación general de la recta r si cumple las siguientes condiciones.

a) Pasa por $A(-2, -4)$ y forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje X.

b) Pasa por el origen de coordenadas y forma un ángulo de 60° con la parte positiva del eje X.

149

Actividades

ACTIVIDAD **RESUELTA**

75. **Dados los puntos $A(-1, 3)$, $B(4, 0)$ y $C(-1, 2)$:**

a) **Halla la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela a la que pasa por B y C.**

b) **Halla la ecuación de la recta perpendicular a la recta que pasa por A y C y que pasa por B.**

a) Se calcula la recta que pasa por B y C:

$$\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y}{2-0}\Rightarrow 2x-8=-5y\Rightarrow 2x+5y=8$$

Las paralelas a esta recta son: $2x+5y+k=0$

Como debe pasar por A, se sustituyen sus coordenadas y se obtiene el término k:

$$2(-1)+5\cdot 3+k=0\Rightarrow k=-13$$

La recta buscada es: $2x+5y-13=0$

b) Se calcula la recta que pasa por A y C:

$$\frac{x+1}{0}=\frac{y-3}{2-3}\Rightarrow x+1=0$$

Es una recta vertical. Por tanto, todas las perpendiculares a ella serán horizontales y tendrán por ecuación $y+k=0$.

Como pasa por B: $0+k=0\Rightarrow k=0$

La recta buscada es: $y=0$ (Eje de abscisas)

76. **Dados los puntos $A(2, 3)$, $B(-4, -1)$ y $C(0, 2)$:**

a) Calcula las ecuaciones de todas las rectas que pasan por dos de los puntos anteriores.

b) Calcula la paralela a la que contiene a A y a B y que pasa por C.

c) Calcula la perpendicular a la que contiene a A y a B y que pasa por C.

77. **Halla la ecuación de la recta perpendicular a la que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(-1, -1)$ y que pasa por el origen de coordenadas.**

78. **Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0, 3)$ y por el punto de corte de r: $8x-5y+2=0$ y s: $2x+y-4=0$.**

79. **Halla la mediatriz del segmento de extremos A y B en los siguientes casos.**

a) $A(-2, 4)$ y $B(2, -4)$

b) $A(1, 4)$ y $B(-2, 3)$

80. **Halla las medianas y el baricentro del triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ y $C(5, 0)$.**

81. **Se consideran las rectas r: $y=x-3$ y s, determinada por los puntos $A(7, 5)$ y $B(-4, 1)$. ¿Cuál es su posición relativa?**

82. **Los lados de un triángulo vienen dados por las rectas $3x-y-6=0$, $3x+y-18=0$ e $y=0$.**

a) Halla las coordenadas de los vértices.

b) Clasifica el triángulo en función de sus lados.

c) Halla las ecuaciones de las medianas.

d) Halla el baricentro del triángulo.

Actividades de síntesis

83. **Un triángulo tiene dos vértices en $A(0, 0)$ y $B(2, 0)$. Halla las coordenadas del tercer vértice sabiendo que es un triángulo equilátero.**

84. **Siendo $\vec{u}=(4, x)$, halla el valor de x en cada una de las siguientes situaciones.**

a) El módulo de $\vec{u}$ vale $\sqrt{20}$ unidades.

b) Si $\vec{v}=(3, -5)$ es tal que el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ es igual a 2.

85. **Determina un vector cuyo módulo valga $\sqrt{10}$ unidades lineales y que forme un ángulo de 30° con la horizontal.**

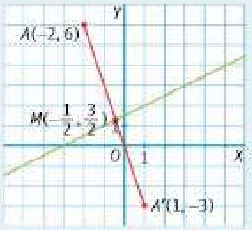
86. **Las rectas r: $x-y+1=0$, s: $x+y-7=0$, t: $x-y-5=0$ y u: $x+y-5=0$ determinan un cuadrilátero.**

a) Calcula las medidas de los lados y de los ángulos interiores.

b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

ACTIVIDAD **RESUELTA**

87. **Calcula el punto simétrico de $A(-2, 6)$ respecto de la recta r: $x-3y=-5$.**



Para que A' sea el simétrico de A respecto de r, se debe verificar que r sea la mediatriz del segmento de extremos A y A'.

Se calcula la recta perpendicular a r y que pasa por A:

$3x+y+k=0\Rightarrow$
$\Rightarrow -6+6+k=0\Rightarrow k=0$

La recta que pasa por A y A' es s: $3x+y=0$.

Se calcula el punto M intersección de r y de s:

$$\begin{cases}x-3y=-5\\3x+y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-9y=-15\\3x+y=0\end{cases}\Rightarrow -10y=-15\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{3}{2},\ x=-\frac{1}{2}\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

Como M debe ser el punto medio del segmento de extremos A y A', despejando:

$$\left.\begin{array}{l}A(-2,6)\\M\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\\A'(a,b)\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{-2+a}{2},\ \frac{3}{2}=\frac{6+b}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=1,\ b=-3\Rightarrow A'(1,-3)$$

88. **Calcula el punto simétrico de:**

a) $A(3, -4)$ respecto de la recta r: $2x+y=3$

b) $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ respecto de la recta r: $\frac{1}{2}x+y=0$

89. **Calcula el triángulo simétrico del que tiene como vértices $A(-2, 0)$, $B(1, 4)$ y $C(2, -2)$ respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.**

PROBLEMAS PARA RESOLVER

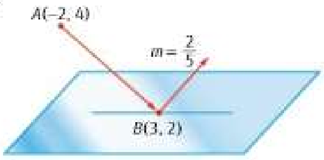
90. Se va a implantar un sistema de riego automático en una rosaleda. Si dos rosales están situados en los puntos $A(4, 6)$ y $B(9, 8)$, y un tercero, en el punto $C(0, 6)$, ¿es posible que una tubería recta pase por los tres a la vez?

91. Un barco lanza un mensaje de socorro indicando su posición: $A(1460, 765)$. Dos barcos situados en $B(3525, 2490)$ y $C(585, 3500)$ acuden en su ayuda. Si los dos navegan a la misma velocidad y en línea recta hacia A, ¿cuál llegará primero?

92. Con un solo golpe sobre la bola A, debe golpear primero a la bola B y después a la bola C. Si se consideran dos lados de la mesa como ejes de coordenadas, las coordenadas de las bolas son $A(20, 28)$, $B(5, 10)$ y $C(12, 36)$.

¿Con qué ángulo, respecto de la trayectoria seguida por A cuando golpea a B, debe salir la bola para golpear a la bola C?

93. Un rayo de luz incide en el espejo con una trayectoria rectilínea determinada por los puntos $A(-2, 4)$ y $B(2, 3)$, siendo B el punto de contacto con el espejo, y A, el punto de origen. Al reflejarse, la pendiente de la recta que describe su trayectoria es $\frac{2}{5}$.



a) Escribe las ecuaciones de las rectas que determinan los rayos incidente y reflejado.

b) Halla un vector director de cada una de ellas y el ángulo que forman.

c) La posición del espejo forma el mismo ángulo con el rayo incidente y el reflejado. Encuentra la ecuación de la recta que la define.

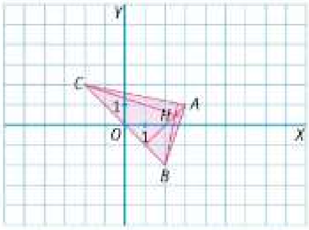
94. Una altura de un triángulo es el segmento que tiene por extremo uno de los vértices y es perpendicular al lado opuesto. El ortocentro de un triángulo es el punto donde se cortan las tres alturas.

Dado el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(2, -2)$ y $C(-2, 2)$:

a) Halla las ecuaciones de sus tres alturas.

b) Calcula el ortocentro H resolviendo el sistema formado por dos de sus alturas.

c) Comprueba que H pertenece a las tres alturas.



ACTIVIDADES PARA PENSAR MÁS

95. Considera dos puntos B y C en un plano. Sea S el conjunto de todos los puntos A de ese plano para los que el área del triángulo ABC es 1. ¿Qué es S?

A. Dos rectas paralelas
B. Una circunferencia
C. Un segmento
D. Dos puntos

96. Si m y b son números reales y $mb > 0$, la recta de ecuación $y = mx + b$ no puede contener al punto:

A. (0, 2011)
B. (20, 10)
C. (20, −10)
D. (2011, 0)

97. El área del triángulo limitado por las rectas $y = x$, $y = -x$ e $y = 6$ es:

A. 48 B. 36 C. 24 D. 18

98. Una recta r divide en dos trozos de igual área al rectángulo de vértices $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 4)$ y $(-2, 4)$ y al rectángulo de vértices $(1, 0)$, $(5, 0)$, $(1, 12)$ y $(5, 12)$.

¿Cuál es la pendiente de esta recta?

A. −4 B. −1 C. 0 D. 1

Encuentra el error

99. Andrea ha realizado uno de los ejercicios propuestos por su profesor:

Calcula la recta que tiene como vector normal $\vec{u} = (5, -2)$ y que pasa por el punto $A(-2, 4)$. Esta es su respuesta:

$2x + 5y + k = 0 \Rightarrow -4 + 20 + k = 0 \Rightarrow k = -16$
La recta es $2x + 5y = 16$.

¿Dónde está el error?

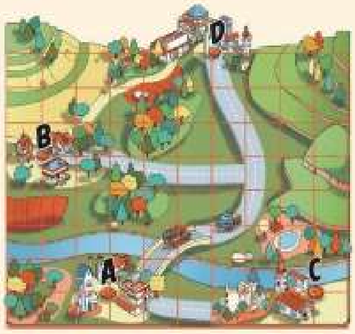
151

Ponte a prueba

PROBLEMA **RESUELTO** **Situación del punto limpio**

Se ha decidido construir un punto limpio para que los habitantes de las cuatro localidades *A*, *B*, *C* y *D*, puedan llevar sus residuos que, posteriormente, se enviarán a una planta de reciclaje.

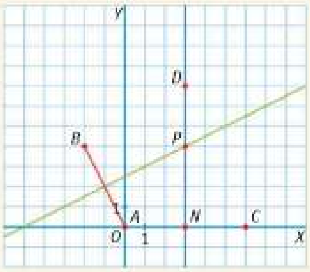
El criterio para construir la instalación es que debe ser un lugar situado a igual distancia de las localidades *A*, *B* y *C* ya que son las que, con mucha diferencia, tienen mayor población.



1. Dibuja un sistema de referencia de ejes perpendiculares que sitúe su origen en el punto *A* y de forma que el punto *C* pertenezca a uno de los ejes. Escribe las coordenadas de las cuatro localidades en este sistema de referencia.
2. Encuentra gráficamente el punto elegido para construir el punto limpio según el criterio dado y calcula sus coordenadas en el sistema de referencia anterior.
3. Si finalmente se construye la instalación en este punto, ¿a qué distancia estará la localidad *D*?

A. 2 km **B.** 3 km **C.** 4 km **D.** 5 km

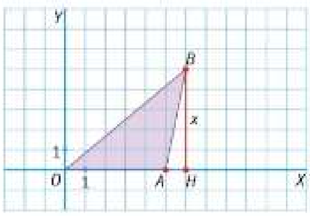
SOLUCIÓN



1. Las coordenadas de las localidades son:
$A(0, 0)$, $B(-2, 4)$, $C(6, 0)$, $D(3, 7)$
2. El punto donde hay que construir el punto limpio es el circuncentro del triángulo de vértices A, B y C, es decir, el punto que equidista de los tres puntos. Para calcular sus coordenadas, se halla la intersección de las mediatrices del triángulo.
   - Se calcula la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos *A* y *B*.
   Para ello, se halla el punto medio de los extremos *A* y *B*, $M(-1, 2)$. Todas las rectas perpendiculares al segmento *AB* son de la forma:
   $\overrightarrow{AB}=(-2, 4) \Rightarrow -2x+4y+k=0$
   Entre ellas, la que pasa por *M* es:
   $-2(-1)+4\cdot 2+k=0 \Rightarrow k=-10 \Rightarrow -2x+4y-10=0 \Rightarrow x-2y+5=0$
   - La mediatriz del segmento *AC* será la recta vertical que pasa por el punto $N(3, 0)$. Por tanto, su ecuación es $x=3$.
   - Se resuelve el sistema formado por las mediatrices:
   $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow x=3,\ y=4 \Rightarrow$ El punto $P(3, 4)$ equidista de *A*, *B* y *C*.
   En este punto se colocará el punto limpio.
   - Se puede comprobar que *P* equidista de *A*, *B* y *C*.
   $d(P,A)=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=d(P,B)=\sqrt{(3+2)^2+(4-4)^2}=d(P,C)=\sqrt{(3-6)^2+(4-0)^2}=\sqrt{25}=5$ km
3. $d(P,D)=\sqrt{(3-3)^2+(4-7)^2}=\sqrt{9}=3$ km. El punto limpio quedará más cerca de la localidad *D* que de las otras tres *A*, *B* y *C*.

Superficie de un huerto

Un huerto de hortalizas tiene forma de triángulo y quiere conocerse su área. Los vértices están situados en los puntos $O(0, 0)$, $A(5, 0)$ y $B(6, 5)$.

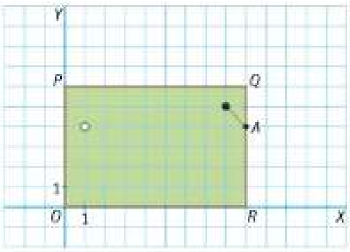


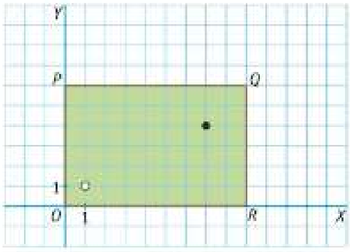
1. La distancia menor entre los vértices es:
A. $d(O, A)$ **B.** $d(O, B)$ **C.** $d(A, B)$ **D.** Ninguna
2. Halla la ecuación de la perpendicular *r* al eje *X* y que pasa por *B*.
3. ¿Cuáles son las coordenadas del punto *H* donde *r* corta al eje *X*?
4. ¿Cuál es la distancia que separa a *B* de *H*?
A. 3 u **B.** 4 u **C.** 5 u **D.** 6 u
5. Calcula el área del huerto.

La trayectoria adecuada

Cualquier jugador de billar debe recordar el principio de reflexión: cuando una bola golpea un lado de la mesa, el ángulo que forma su trayectoria con el lado al llegar es igual al ángulo que forma con él al rebotar.

Observa estas dos situaciones:





El objetivo es golpear la bola negra y lograr que choque con la bola blanca pero rebotando previamente en los lados *QR* y *RO* de la mesa de billar. Por ejemplo, en el primer caso, se ha marcado el punto *A* que es donde la bola negra debe rebotar en el lado *QR*.

1. Utiliza el sistema de referencia para calcular la trayectoria adecuada en cada situación.
2. Indica las coordenadas de los dos puntos de rebote y los ángulos correspondientes en cada caso.

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula el vector resultante en cada caso.
   a) $3(6, 2) + (5, -4) - 6(2, 1)$
   b) $5[(7, -2) + (-8, 1)]$
   c) $(2, 3) - [(6, 1) - 4(-3, -2)]$
2. Calcula las coordenadas del extremo *Q* en los siguientes casos:
   a) El vector $\overrightarrow{PQ}$ es $(5, 3)$ y $P(-1, 2)$.
   b) El vector $\overrightarrow{PQ}$ es $(-2, 6)$ y $P(-2, -4)$.
3. Estudia si son perpendiculares los vectores e indica el ángulo que forman.
   a) $\vec{u} = (-2, 8)$ y $\vec{v} = (4, 1)$
   b) $\vec{u} = (-3, 7)$ y $\vec{v} = (2, -1)$
   c) $\vec{u} = (-1, 6)$ y $\vec{v} = (3, 1)$
4. Comprueba si las siguientes rectas pasan por el punto $(3, -3)$.
   a) $6x - 4y = 6$
   b) $\begin{cases} x = 9 + 2t \\ y = -4 - \frac{1}{3}t \end{cases}$

   Escribe un vector de dirección y otro normal de cada una de las dos rectas.
5. Escribe todas las formas posibles de la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(9, 4)$ y $B(8, 1)$.
6. Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el origen de coordenadas y:
   a) Es paralela a la recta r: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$
   b) Es perpendicular a la recta s: $-2x + 4y - \frac{3}{5} = 0$
7. Estudia la posición relativa de las rectas:
   a) r: $3x - y + 6 = 0$ y s: $3x - 4y + 2 = 0$
   b) r: $4x + 6y + 12 = 0$ y s: $2x + 3y + 9 = 0$

   En el caso de que sean secantes, indica las coordenadas de su punto de intersección.
8. Dado el triángulo de vértices conocidos $A(5, -9)$ $B(-2, -1)$ y $C(7, 2)$:
   a) Calcula las coordenadas de los puntos medios de sus lados.
   b) Halla la medida de sus lados y del ángulo $\hat{A}$.
   c) Calcula la ecuación de la mediana que parte del vértice *A*.

smSaviadigital.com VALORA LO APRENDIDO > Autoevaluación.

153

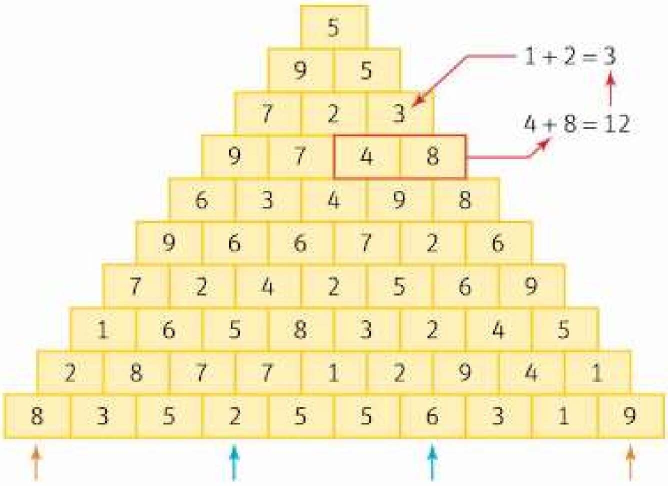
MATES + MAGIA

LA PIRÁMIDE NUMÉRICA

Vamos a hacer un juego de magia utilizando una pirámide numérica. Las pirámides numéricas están formadas por ladrillos, cada uno con un número. El número de cada ladrillo es igual a la suma de los dos ladrillos sobre los que se apoya, con la particularidad de que si la suma da un resultado de dos cifras, has de sumar las cifras entre sí.

Pídele a un espectador que piense 10 números de una cifra y construya una pirámide numérica colocándolos en la base. ¿Serías capaz de calcular el valor del zenit de la pirámide antes que el espectador?

Inténtalo siguiendo el siguiente ejemplo.



Para calcular el resultado final mucho antes que el espectador debes seguir los siguientes pasos:

- Multiplica por 3 los números señalados con la flecha azul (posiciones 4.ª y 7.ª) y súmalos.
- Suma al resultado los números señalados con la flecha naranja (posiciones 1.ª y 10.ª).
- Por último para obtener el valor del zenit, suma las cifras del total entre sí hasta obtener un número de una sola cifra.

¿Cuál es el secreto?

Cuando sumamos las cifras de un número, el resultado nos da el valor que tendría el resto de dividir ese número entre 9.

Si cambiamos por letras los valores de la base de la pirámide, el resultado final de la cima será:

$$a+9b+36c+84d+126e+126f+84g+36h+9i+j$$

Donde los términos: $9b+36c+126e+126f+36h+9i$ son múltiplos de 9, y por tanto se cancelan. Quedando solo los términos $a+84d+84g+j$, y como $84d=81d+3d$, se puede simplificar obteniendo la expresión:

$$a+3d+3g+j$$

154

Página siguiente

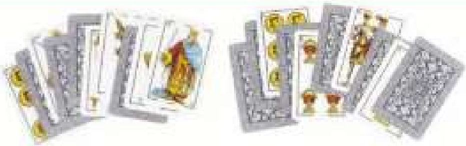
CARA ARRIBA Y CARA ABAJO

Se va realizar un juego de magia con cartas. Para ello, solo necesitas una baraja de cartas y seguir los siguientes pasos:

1 **Cara arriba y cara abajo:** Pide a un espectador que corte las cartas de la baraja formando dos montones de cartas iguales y que coloque uno de los dos cara abajo y otro cara arriba. Es importante que cada montón tenga el mismo número de cartas.

2 **El intercambio:** Debe tomar algunas cartas del montón que está cara abajo y el mismo número de cartas del montón cara arriba e intercambiarlas de forma que finalmente tenga dos montones de cartas mezcladas.

El espectador debe repetir el intercambio dos o tres veces más hasta tener una situación totalmente caótica.



Como hemos intercambiado el mismo número de cartas de un montón a otro, los dos mazos seguirán siendo iguales aunque no tendrán el mismo número de cartas cara arriba y cara abajo, después de tantos intercambios al azar.

3 **La elección:** En este momento, el espectador debe elegir uno de los dos montones y tú te quedarás con el otro.

4 **Magia:** Por último llévate tu montón a la espalda y cuando vuelvas a depositar el paquete en la mesa colócalo dado la vuelta, de esta forma habrá la misma cantidad de cartas boca arriba y boca abajo en los dos paquetes.

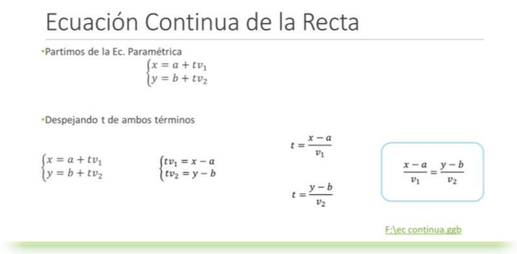
¿Cuál es el secreto?

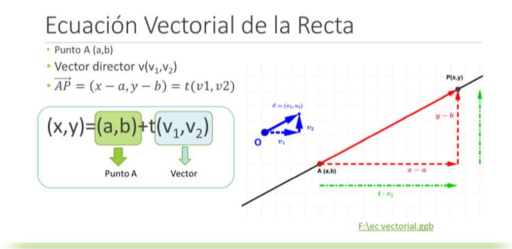
Después de todo el proceso, la cantidad de cartas cara arriba en uno de los montones es la misma que la de cartas cara abajo en el otro, y viceversa.

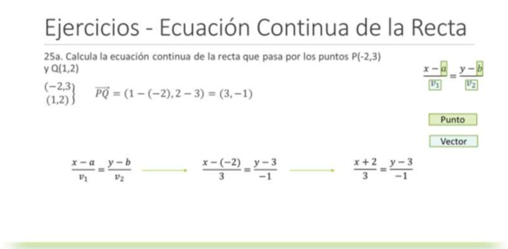
Si lo piensas es totalmente lógico: supón que cada montón tiene 10 cartas en él inicialmente. Después del primer intercambio, si el montón A tiene x cartas cara arriba, en el B quedan $10-x$ cara arriba. Si en el montón B hay $10-x$ cartas cara arriba, quedaran x cartas cara abajo. Por tanto hay tantas cartas cara arriba en A como cartas cara abajo en B y viceversa. Por eso el mago debe dar la vuelta al montón para que coincidan.

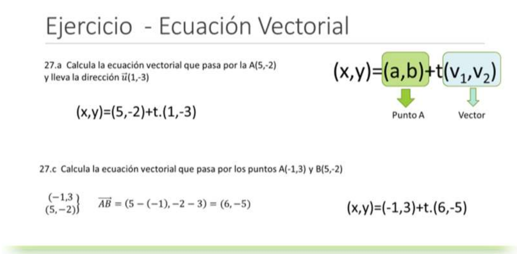
155

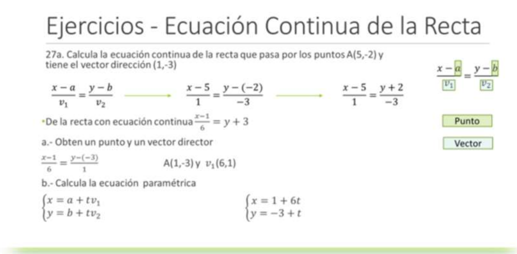
II. Presentación PowerPoint Ecuaciones de la Recta

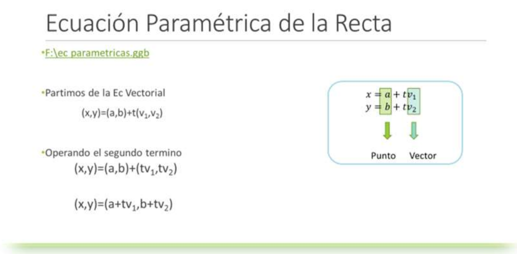


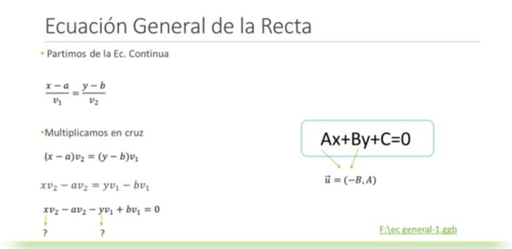


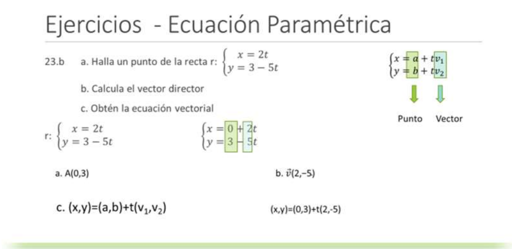


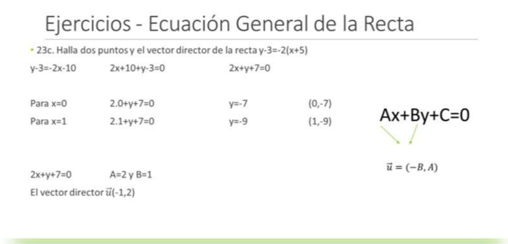


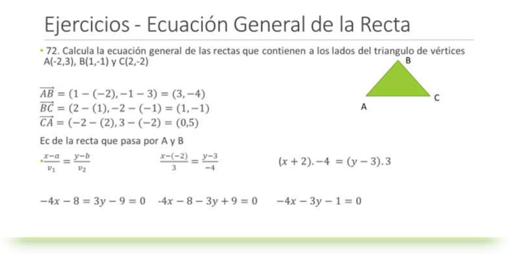


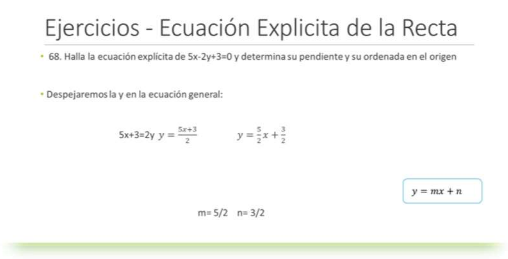


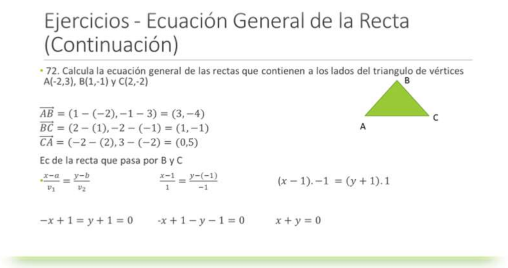


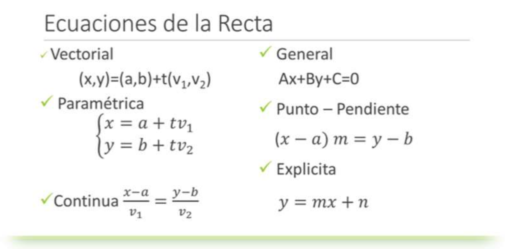


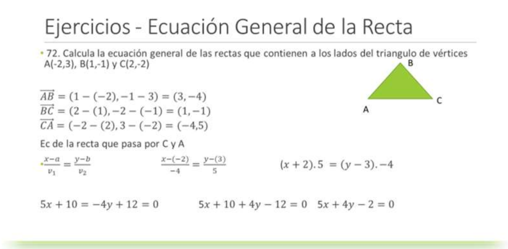


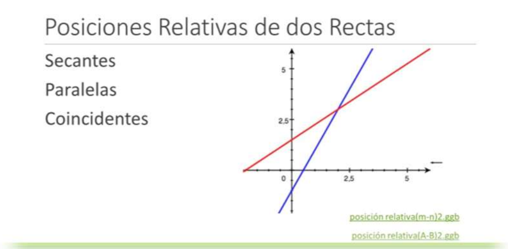

Ejercicios - Ecuación General de la Recta
72. Calcula la ecuación general de las rectas que contienen a los lados del triangulo de vértices A(-2,3), B(1,-1) y C(2,-2)
$\overrightarrow{AB} = (1-(-2), -1-3) = (3,-4)$
$\overrightarrow{BC} = (2-(1), -2-(-1)) = (1,-1)$
$\overrightarrow{CA} = (-2-(2), 3-(-2)) = (0,5)$
Ec de la recta que pasa por A y B
$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2}$
$\frac{x-(-2)}{3} = \frac{y-3}{-4}$
$(x+2).-4 = (y-3).3$
$-4x-8 = 3y-9 = 0$
$-4x-8-3y+9 = 0$
$-4x-3y-1 = 0$
B
A
C

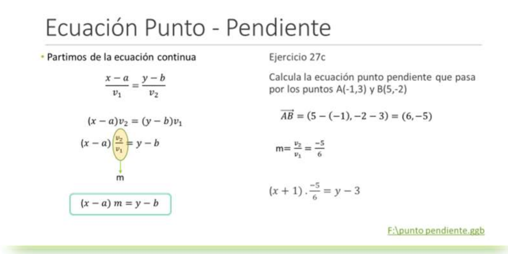

Ejercicios - Ecuación Explicita de la Recta
68. Halla la ecuación explicita de 5x-2y+3=0 y determina su pendiente y su ordenada en el origen
Despejaremos la y en la ecuación general:
5x+3=2y $y = \frac{5x+3}{2}$
$y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$
$y = mx + n$
m= 5/2 n= 3/2

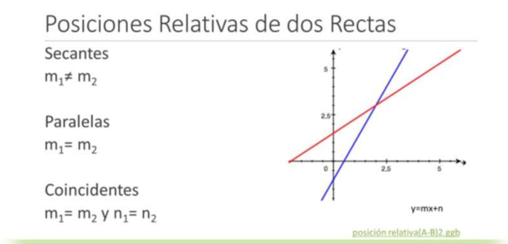

Ejercicios - Ecuación General de la Recta (Continuación)
72. Calcula la ecuación general de las rectas que contienen a los lados del triangulo de vértices A(-2,3), B(1,-1) y C(2,-2)
$\overrightarrow{AB} = (1-(-2), -1-3) = (3,-4)$
$\overrightarrow{BC} = (2-(1), -2-(-1)) = (1,-1)$
$\overrightarrow{CA} = (-2-(2), 3-(-2)) = (0,5)$
Ec de la recta que pasa por B y C
$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2}$
$\frac{x-1}{1} = \frac{y-(-1)}{-1}$
$(x-1).-1 = (y+1).1$
$-x+1 = y+1 = 0$
$-x+1-y-1 = 0$
$x+y = 0$
B
A
C

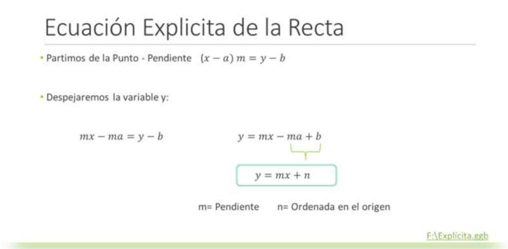

Ecuaciones de la Recta
Vectorial
$(x,y)=(a,b)+t(v_1,v_2)$
Paramétrica
$\begin{cases} x = a + tv_1 \\ y = b + tv_2 \end{cases}$
Continua $\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2}$
General
Ax+By+C=0
Punto – Pendiente
$(x-a)\,m = y-b$
Explicita
$y = mx + n$

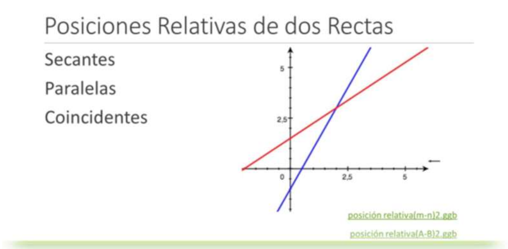

Ejercicios - Ecuación General de la Recta
72. Calcula la ecuación general de las rectas que contienen a los lados del triangulo de vértices A(-2,3), B(1,-1) y C(2,-2)
$\overrightarrow{AB} = (1-(-2), -1-3) = (3,-4)$
$\overrightarrow{BC} = (2-(1), -2-(-1)) = (1,-1)$
$\overrightarrow{CA} = (-2-(2), 3-(-2)) = (-4,5)$
Ec de la recta que pasa por C y A
$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2}$
$\frac{x-(-2)}{-4} = \frac{y-(3)}{5}$
$(x+2).5 = (y-3).-4$
$5x+10 = -4y+12 = 0$
$5x+10+4y-12 = 0$
$5x+4y-2 = 0$
B
A
C


Posiciones Relativas de dos Rectas
Secantes
Paralelas
Coincidentes
5
2,5
0
2,5
5
posición relativa(m-n)2.ggb
posición relativa(A-B)2.ggb


Ecuación Punto - Pendiente
Partimos de la ecuación continua
$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2}$
$(x-a)v_2 = (y-b)v_1$
$(x-a)\frac{v_2}{v_1} = y-b$
m
$\boxed{(x-a)\,m = y-b}$
Ejercicio 27c
Calcula la ecuación punto pendiente que pasa por los puntos A(-1,3) y B(5,-2)
$\overrightarrow{AB} = (5-(-1), -2-3) = (6,-5)$
$m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-5}{6}$
$(x+1).\frac{-5}{6} = y-3$
F:\punto pendiente.ggb


Posiciones Relativas de dos Rectas
Secantes
$m_1 \neq m_2$
Paralelas
$m_1 = m_2$
Coincidentes
$m_1 = m_2$ y $n_1 = n_2$
5
2,5
0
2,5
5
y=mx+n
posición relativa(A-B)2.ggb


Ecuación Explicita de la Recta
Partimos de la Punto - Pendiente $(x-a)\,m = y-b$
Despejaremos la variable y:
$mx - ma = y - b$
$y = mx - ma + b$
$\boxed{y = mx + n}$
m= Pendiente n= Ordenada en el origen
F:\Explicita.ggb


Posiciones Relativas de dos Rectas
Secantes
Paralelas
Coincidentes
5
2,5
0
2,5
5
posición relativa(m-n)2.ggb
posición relativa(A-B)2.ggb

Posiciones Relativas de dos Rectas

Secantes

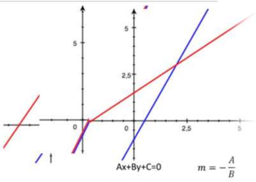
$m_1 \neq m_2$ $\quad \frac{A}{A\prime} \neq \frac{B}{B\prime}$

Paralelas

$m_1 = m_2$ $\quad \frac{A}{A\prime} = \frac{B}{B\prime}$

Coincidentes

$m_1 = m_2$ y $n_1 = n_2$ $\quad \frac{A}{A\prime} = \frac{B}{B\prime} = \frac{C}{C\prime}$



posición relativa(A-B)2.ggb

Ejercicios - Posiciones Relativas de dos Rectas

28. Estudia la posición relativa de las rectas:

a. r:2x+y-5=0 y s:4x+3y=11

$y_r = -2x + 5$ $\qquad y_s = -\frac{4x}{3} + \frac{11}{3}$

Evaluamos las pendientes

m_r=-2 y m_s=-4/3 Son secantes

posición relativa(A-B)2.ggb

Ejercicios - Posiciones Relativas de dos Rectas

28. Estudia la posición relativa de las rectas:

b. r: $-\frac{1x}{2} + \frac{3y}{4} + \frac{5}{4} = 0$ y s:2x-3y-5=0

$y_r = -2x + 3y + 5 = 0$ $\qquad y_s = \frac{2x}{3} - \frac{5}{3}$

$y_r = \frac{2x}{3} - \frac{5}{3}$

Evaluamos las pendientes

m_r= 2/3 y m_s=2/3

n_r= -5/3 y n_s=-5/3 SON COINCIDENTES

posición relativa(A-B)2.ggb

Ejercicios - Posiciones Relativas de dos Rectas

34. Halla la ecuación explicita de la recta que pasa por el punto A(-2,4) y es paralela a la que tiene ecuación 7x-14y+3=0

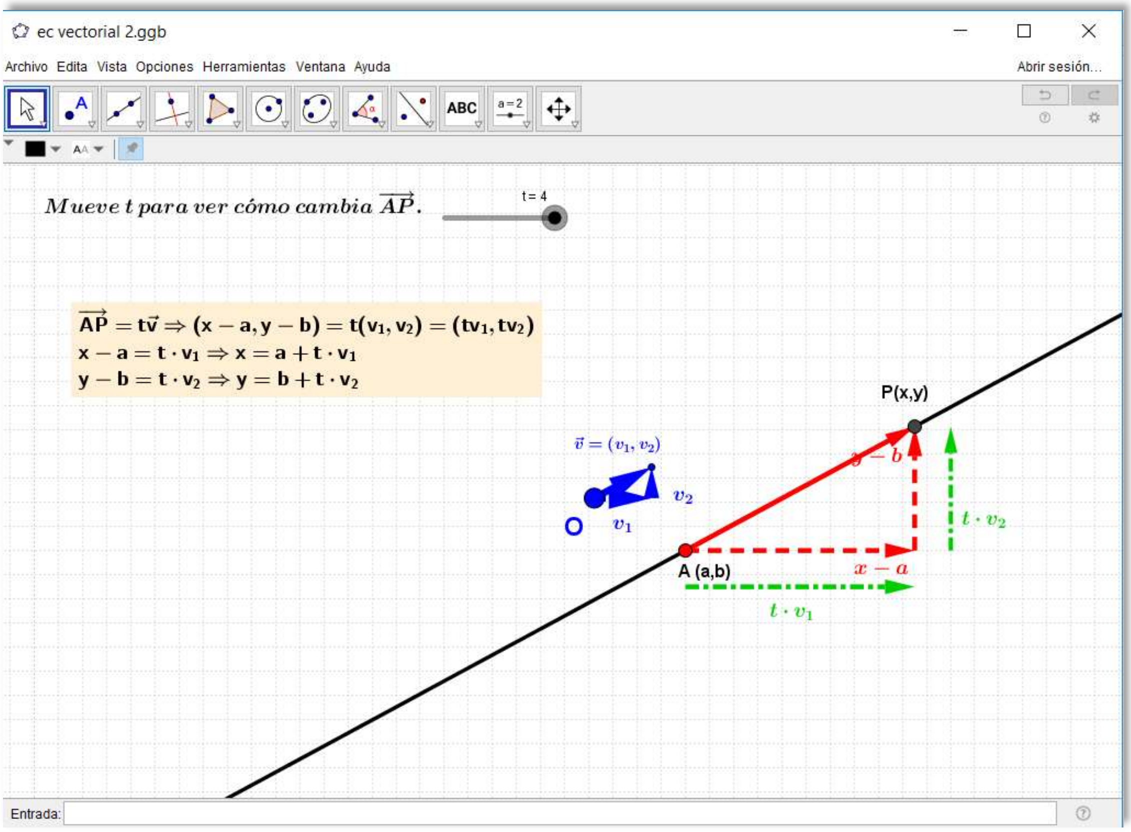
$$y = \frac{7x}{14} + \frac{3}{14}$$

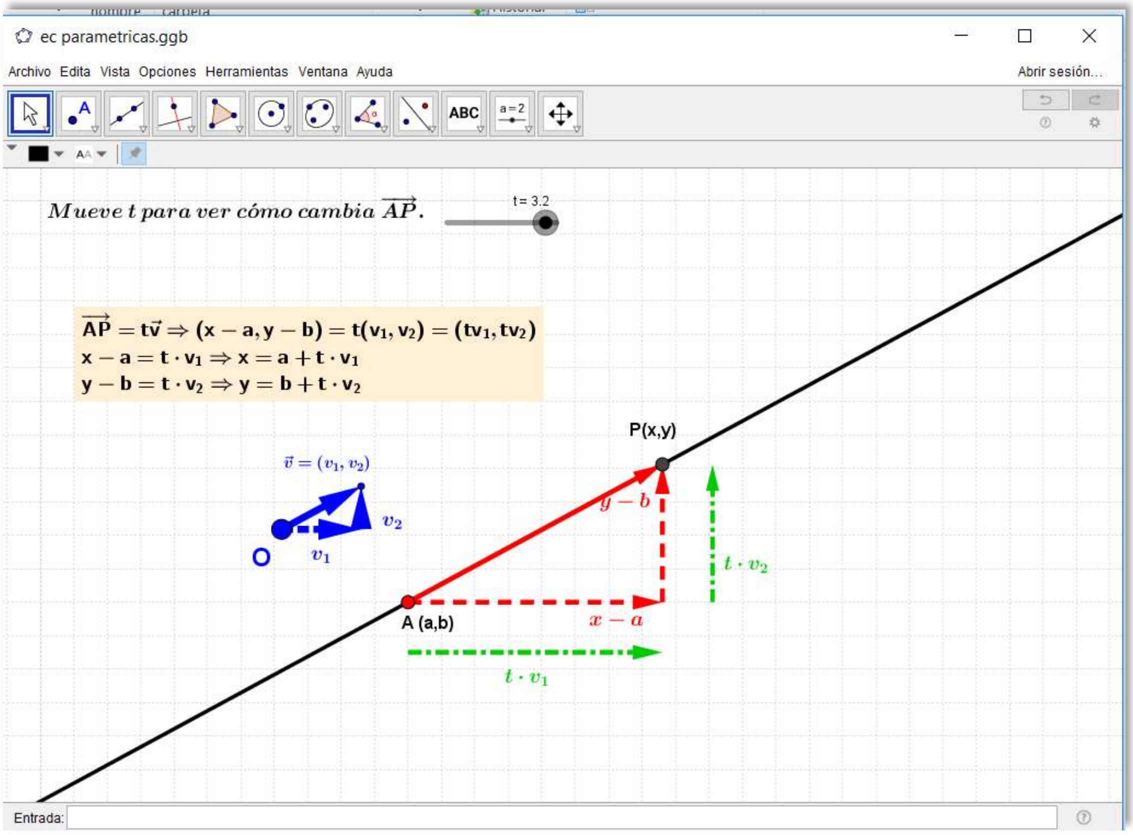
$y = \frac{7x}{14} + n$ $\qquad 4 = \frac{7(-2)}{14} + n$ $\quad 4 = \frac{-14}{14} + n$ $\quad 4 + 1 = n$

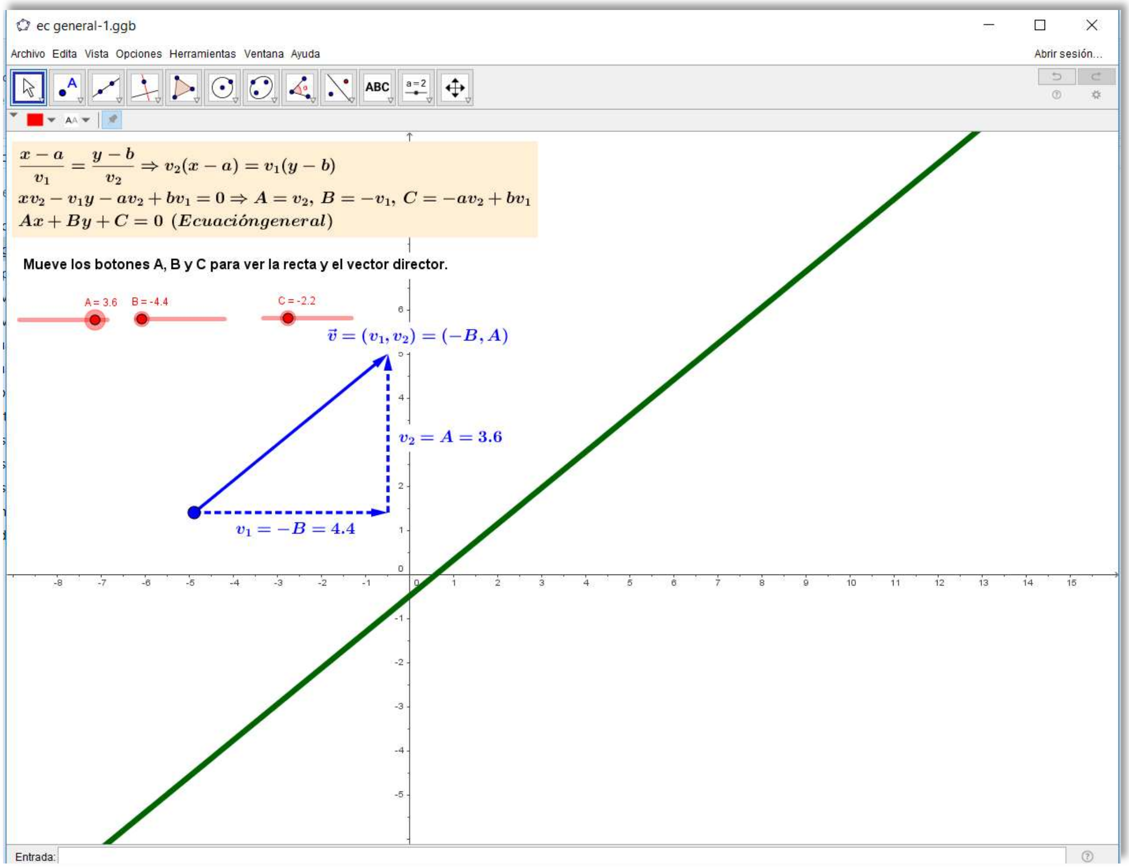
$5 = n$ $\qquad y = \frac{7x}{14} + 5$ $\qquad y = \frac{x}{2} + 5$

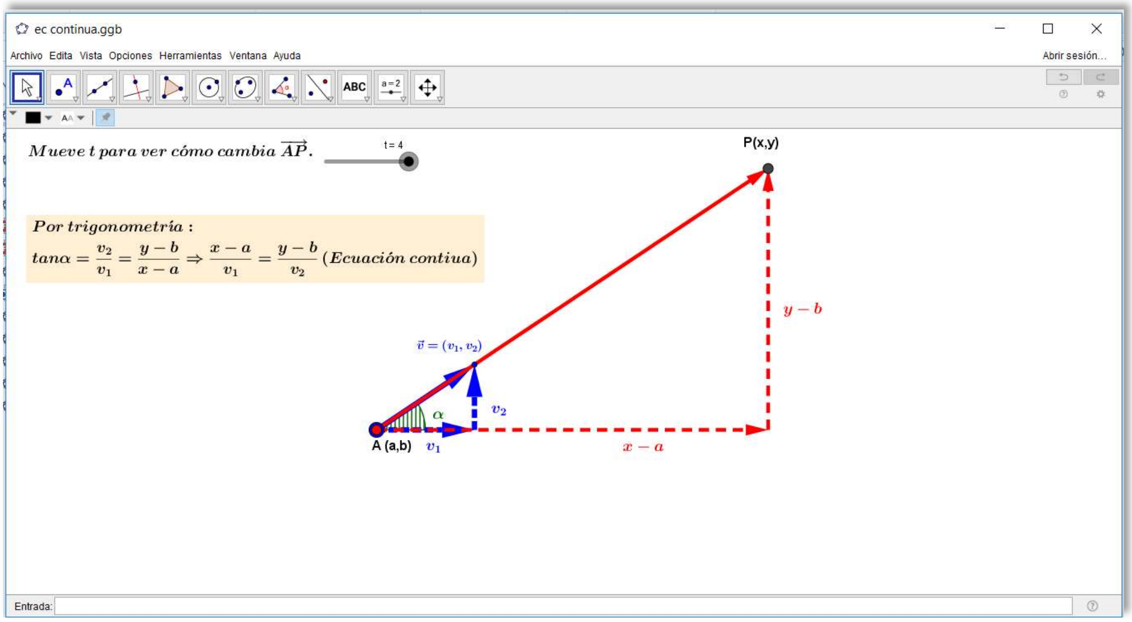
posición relativa(A-B)2.ggb

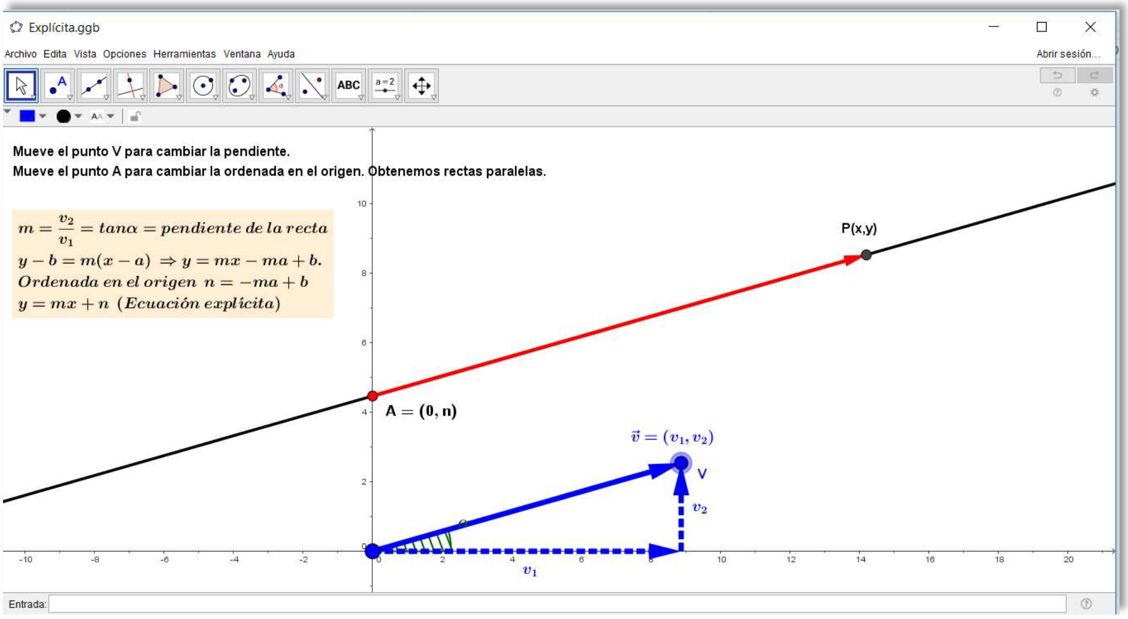
III. Applets GeoGebra

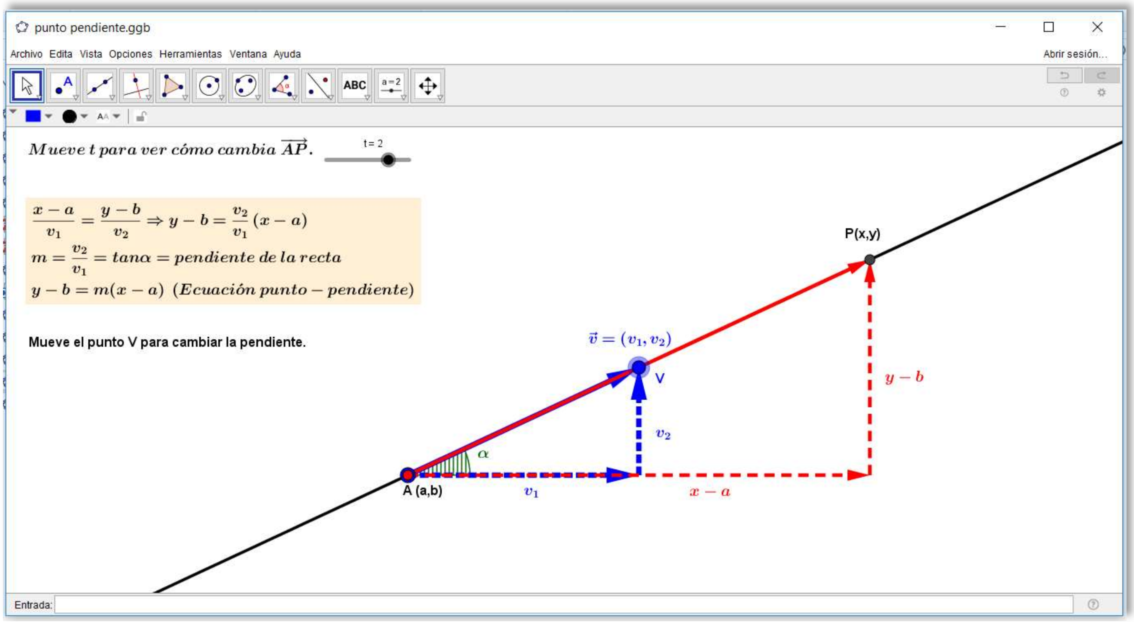


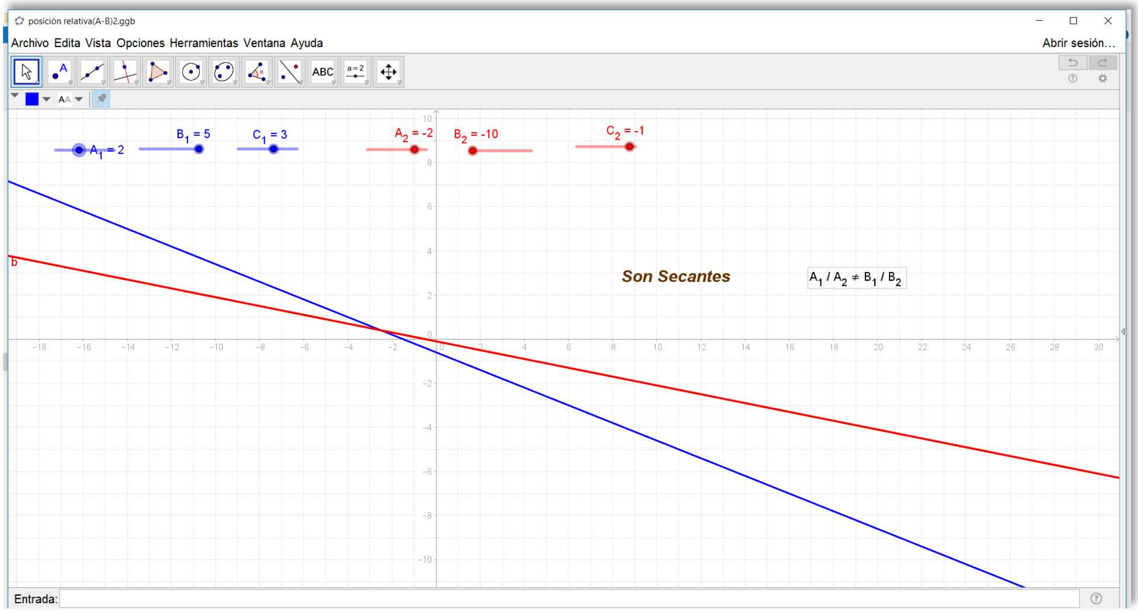

ec parametricas.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Mueve t para ver cómo cambia $\overrightarrow{AP}$.
t = 3.2
$\overrightarrow{AP} = t\vec{v} \Rightarrow (x-a, y-b) = t(v_1, v_2) = (tv_1, tv_2)$
$x - a = t \cdot v_1 \Rightarrow x = a + t \cdot v_1$
$y - b = t \cdot v_2 \Rightarrow y = b + t \cdot v_2$
P(x,y)
$\vec{v} = (v_1, v_2)$
v_2
O
v_1
$y - b$
$t \cdot v_2$
A (a,b)
$x - a$
$t \cdot v_1$
Entrada:


ec general-1.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} \Rightarrow v_2(x-a) = v_1(y-b)$
$xv_2 - v_1y - av_2 + bv_1 = 0 \Rightarrow A = v_2,\ B = -v_1,\ C = -av_2 + bv_1$
$Ax + By + C = 0$ (Ecuacióngeneral)
Mueve los botones A, B y C para ver la recta y el vector director.
A = 3.6
B = -4.4
C = -2.2
$\vec{v} = (v_1, v_2) = (-B, A)$
$v_2 = A = 3.6$
$v_1 = -B = 4.4$
Entrada:


ec continua.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
$Mueve\ t\ para\ ver\ cómo\ cambia\ \overrightarrow{AP}.$
t = 4
P(x,y)
$Por\ trigonometría:$
$tan\alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{y-b}{x-a} \Rightarrow \frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2}\ (Ecuación\ contiua)$
$y-b$
$\vec{v} = (v_1, v_2)$
v_2
α
A (a,b)
v_1
$x-a$
Entrada:


Explícita.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
Mueve el punto V para cambiar la pendiente.
Mueve el punto A para cambiar la ordenada en el origen. Obtenemos rectas paralelas.
$m = \frac{v_2}{v_1} = tan\alpha = pendiente\ de\ la\ recta$
$y-b = m(x-a) \Rightarrow y = mx - ma + b.$
$Ordenada\ en\ el\ origen\ n = -ma + b$
$y = mx + n\ (Ecuación\ explícita)$
P(x,y)
$A = (0, n)$
$\vec{v} = (v_1, v_2)$
V
v_2
v_1
Entrada:


punto pendiente.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
$Mueve\ t\ para\ ver\ cómo\ cambia\ \overrightarrow{AP}.$
t = 2
$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} \Rightarrow y-b = \frac{v_2}{v_1}(x-a)$
$m = \frac{v_2}{v_1} = tan\alpha = pendiente\ de\ la\ recta$
$y-b = m(x-a)\ (Ecuación\ punto-pendiente)$
Mueve el punto V para cambiar la pendiente.
$\vec{v} = (v_1, v_2)$
P(x,y)
V
$y-b$
v_2
α
A (a,b)
v_1
$x-a$
Entrada:


posición relativa(A-B)2.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Abrir sesión...
$A_1 = 2$
$B_1 = 5$
$C_1 = 3$
$A_2 = -2$
$B_2 = -10$
$C_2 = -1$
Son Secantes
$A_1 / A_2 \neq B_1 / B_2$
Entrada:

EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Directores:

Laura Portero, Andrés Arrarás.

Departamento de Ingeniería Matemática e Informática